<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

23.05.2019 г. – Вариант 1

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

Задача 1. **Ако** 5% **от** x **е** $x\%$ **от** y**, то** y **е равно на:**

А) 5 **Б)** 20 **В)** 25 **Г)** 100

Задача 2. **Стойността на израза** $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}$ **е:**

А) $3-2\sqrt{5}$ **Б)** -1 **В)** 1 **Г)** $2\sqrt{5}-3$

Задача 3. **Множеството от НЕДОПУСТИМИТЕ стойности на израза** $\dfrac{x\left(x^2-x-2\right)}{\left(x^2-x\right)^2-4}$ **е:**

А) $\varnothing$ **Б)** $\{-1,2\}$ **В)** $\{-2,1\}$ **Г)** $\{-2,-1,1,2\}$

Задача 4. **Кое от уравненията НЯМА отрицателни корени?**

А) $x^4-16=0$ **Б)** $x^4=x^2$ **В)** $x^3-x^2=0$ **Г)** $x^3+8=0$

Задача 5. **Числената стойност на израза** $\dfrac{\left(3^{-5}\right)^4}{3^{-21}}$ **е:**

А) 3 **Б)** 3^{-1} **В)** 3^{-30} **Г)** 3^{-41}

Задача 6. **Системата** $\left|\begin{array}{l} x=2y \\ x^2=4\left(x-y\right)y \end{array}\right.$ **:**

А) няма решение **Б) има само едно решение**

В) има две решения **Г) има безброй много решения**

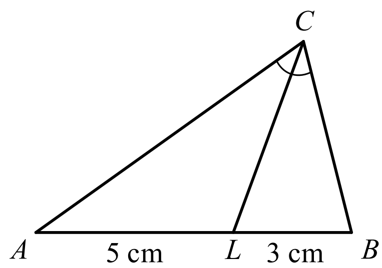
Задача 7. Сборът от корените на уравнението $\left(x^2-4\right)\left(x^2-3x\right)=0$ **е:**

А) -3 **Б)** -1 **В)** 3 **Г)** 5

Задача 8. Стойността на израза $\sin\left(\alpha-15^\circ\right)\sin\left(2\alpha+15^\circ\right)$ **при** $\alpha=30^\circ$ **е:**

А) $\frac{1}{4}$ **Б)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 1

Задача 9. В $\triangle ABC$ CL **е ъглополовяща,** $AL = 5$ **cm и** $BL = 3$ **cm. Периметърът на** $\triangle ABC$ **е** 20 **cm. Дължината на страната** AC **е:**



А) 4,5 **cm** **Б)** 7,5 **cm** **В)** 8 **cm** **Г)** 8,5 **cm**

Задача 10. Височината CD **в правоъгълния** $\triangle ABC$ **разделя хипотенузата му на отсечки с дължини** $AD = 8$ **cm и** $BD = 1$ **cm. Дължината на по-малкия катет на** $\triangle ABC$ **е:**

А) $2\sqrt{2}$ **cm** **Б)** 3 **cm** **В)** $6\sqrt{2}$ **cm** **Г)** 8,5 **cm**

Задача 11. Графиката на функцията $f(x)=-x^2+bx+c$ **минава през точките** $A(-2;0)$ **и** $B(0;6)$**. Стойността на** $b+c$ **е:**

А) 11 **Б)** 8 **В)** 7 **Г)** 4

Задача 12. За числовите редици $a_n=\left(-1\right)^n 2n,\ n\in\mathbb{N}$ **и** $b_m=\frac{1}{2^m},\ m\in\mathbb{N}$ **е вярно, че:**

А) и двете са растящи **Б) и двете са намаляващи**

В) само едната е растяща **Г) само едната е намаляваща**

Задача 13. За коя стойност на x **числата** $2, x+1$ **и** x^2-7 **в този ред образуват растяща геометрична прогресия?**

А) -5 **Б)** -3 **В)** 3 **Г)** 5

Задача 14. Множеството от стойностите на функцията $y = 2\sin x\cos x$ е:

А) $[-1;1]$ **Б)** $[-1;0]$ **В)** $[0;2]$ **Г)** $[-2;2]$

Задача 15. За коя от посочените стойности на x медианата на реда x, 5, 6, 10, 10 НЕ е равна на 6?

А) $x = 2$ **Б)** $x = 4$ **В)** $x = 5$ **Г)** $x = 9$

Задача 16. В обедно меню се предлагат 3 вида супи, 5 вида основни ястия и 4 вида десерти. По колко начина може да се направи избор за обяд, ако се избере супа и основно ястие, или супа и десерт, или основно ястие и десерт?

А) 12 **Б)** 15 **В)** 20 **Г)** 47

Задача 17. За $\triangle ABC$ е дадено, че $\sphericalangle ABC = 45°$, $BC = 3$ cm и $AB = 2\sqrt{2}$ cm. Дължината на AC е:

А) $\sqrt{3}$ **cm** **Б)** $\sqrt{5}$ **cm** **В)** $2\sqrt{5}$ **cm** **Г)** $6\sqrt{2}$ **cm**

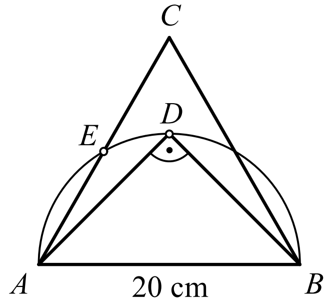
Задача 18. Лицето на вписания в ромба $ABCD$ кръг е $\frac{3\pi}{4}$ cm², а $\sphericalangle BAD = 60°$. Лицето на $ABCD$ е:

А) 3 **cm²** **Б)** $2\sqrt{3}$ **cm²** **В)** $\sqrt{3}$ **cm²** **Г)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **cm²**

Задача 19. Лицето на равнобедрен трапец е 108 cm², а сборът от дължините на основите му е 18 cm. Сборът от дължините на диагоналите на трапеца е:

А) 12 **cm** **Б)** 15 **cm** **В)** 24 **cm** **Г)** 30 **cm**

Задача 20. На чертежа $\triangle ABD$ е правоъгълен и равнобедрен, а $\triangle ABC$ е равностранен. Окръжност с диаметър AB пресича страната AC в точка E. Ако $AB = 20$ cm, то дължината на DE е:



А) $5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ **cm** **Б)** $10\left(\sqrt{3}-1\right)$ **cm**

В) $10\sqrt{2}$ **cm** **Г)** $10\sqrt{3}$ **cm**

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

23.05.2019 г. – Вариант 1

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

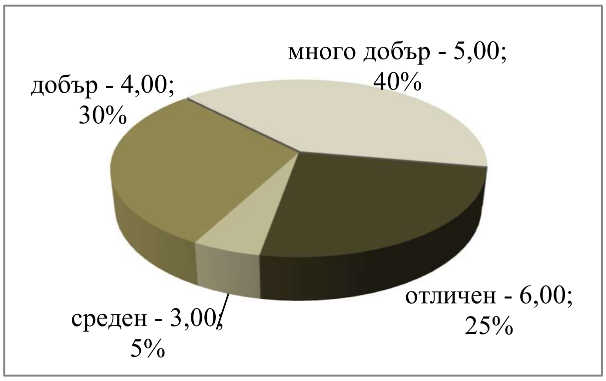
<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

Задача 21. Пресметнете стойността на израза $A=\sqrt{\log_{\sqrt{2}}4}+\left(\log_5 25\right)^{\log_2 6}$**.**

Задача 22. Намерете множеството от решенията на неравенството $\dfrac{x^2-5x+4}{x-x^2}\geq 0$ **.**

Задача 23. Дадена е крайна аритметична прогресия с първи член $a_1=2$ **и разлика** $d=4$**. Намерете броя на членовете на прогресията, ако е известно, че последният ѝ член е равен на сбора на първите** 20 **члена на редицата с общ член** $b_n=3n-1, n\in\mathbb{N}$.

Задача 24. На изпит 25% **от явилите се ученици имат оценка „отличен** 6,00**“,** 40% **– „много добър** 5,00**“,** 30% **– „добър** 4,00**“ и** 5% **– „среден** 3,00**“. Намерете средния успех (с точност до стотните) на явилите се на този изпит ученици.**



Задача 25. В $\triangle ABC$ със страни $AB=\sqrt{22}$ cm, $BC=4$ cm и $AC=6$ cm медианата AM $(M\in BC)$ и ъглополовящата CL $(L\in AB)$ се пресичат в точка N. Намерете разликата $AN-MN$ от дължините на отсечките AN и MN.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

Задача 26. Решете уравнението $\left(x^2+2x\right)^2-\left(x+1\right)^2=55$.

Задача 27. Дадени са изразите $A=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1$, $B=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1$ и $C=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

а) Докажете, че $A=\frac{3}{2}B$ за всички допустими стойности на α.

б) Докажете, че $C=\frac{3}{4}$ за всички допустими стойности на α.

Задача 28. Вписаната в тъпоъгълния $\triangle ABC$ окръжност се допира до най-голямата му страна AB в точка P като $AP=5$ и $BP=9$. Ако радиусът на описаната окръжност около $\triangle ABC$ е $R=\frac{14\sqrt{3}}{3}$, намерете дължините на страните AC и BC и на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ в $\triangle ABC$.

<u>**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

23.05.2019 г. – Вариант 1

Ключ с верните отговори

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	А	2
2	Г	2
3	Б	2
4	В	2
5	А	2
6	Г	2
7	В	2
8	А	2
9	Б	2
10	Б	2
11	В	3
12	Г	3
13	Г	3
14	А	3
15	Г	3
16	Г	3
17	Б	3
18	Б	3
19	Г	3
20	А	3
21	8	4
22	$x \in (0;1) \cup (1;4]$	4
23	153	4
24	4,85	4

25	$AN - MN = \frac{5}{2}\text{ cm} = 2,5\text{ cm}$	**4**
26	$x_1 = 2, x_2 = -4$	**10**
27		**10**
28	$AC = 6,\ BC = 10\ ,\ CL = \frac{15}{4}$	**10**

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Решение на задача 26:

Връзка между $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ и $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.	**1 точка**
Полагане $(x+1)^2 = t,\ t \geq 0$.	**2 точки**
Решаване на уравнението $t^2 - 3t - 54 = 0$.	**2 точки**
Определяне $t_1 = 9,\ 9 > 0,\ t_2 = -6,\ -6 < 0$.	**1 точка**
Връщане в полагането $(x+1)^2 = 9$.	**1 точка**
Решаване на $x + 1 = 3$ и $x + 1 = -3$.	**2 точки**
Намиране на решенията $x_1 = 2, x_2 = -4$.	**1 точка**

Решение на задача 27:

а) $A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1 =$

$$\underbrace{= \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 - 1 = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) - 1 =}_{1\text{ точка}}$$

$$\underbrace{= 1.\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) - 1 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 =}_{1\text{ точка}}$$

$$\underbrace{= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = -3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}_{1\text{ точка}}$$

$$B = \underbrace{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1 = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 =}_{1\text{ точка}}$$

$$\underbrace{= 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}_{1\text{ точка}}$$

$A=-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\ B=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\underbrace{A-\frac{3}{2}B=-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{3}{2}.2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0\Rightarrow A=\frac{3}{2}B}_{\text{1 точка}}$$

б) $C=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\underbrace{\sin^2\alpha-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\pi-2\alpha\right)-\cos\frac{\pi}{3}\right]}_{\text{1 точка}}=$

$$\underbrace{=\sin^2\alpha-\frac{1}{2}\left[-\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right]}_{\text{1 точка}}=\underbrace{\sin^2\alpha-\frac{1}{2}\left[\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\right]}_{\text{1 точка}}=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}_{\text{1 точка}}$$

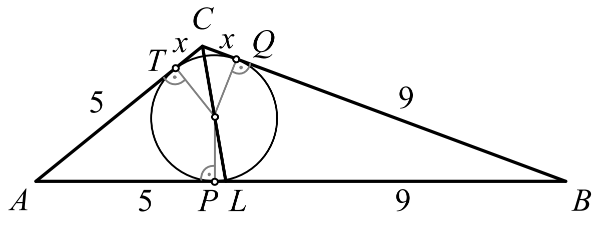
За определяне на $A=-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.	**3 точки**
За определяне на $B=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.	**2 точки**
За извод, че $A=\frac{3}{2}B$.	**1 точка**
За доказване, че $C=\frac{3}{4}$.	**4 точки**

Решение на задача 28:

Прилагаме синусова теорема за $\triangle ABC$

$\sin\sphericalangle ACB=\frac{AB}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогава $\sphericalangle ACB=120^\circ$ или $\sphericalangle ACB=60^\circ$,



но $\triangle ABC$ е тъпоъгълен и AB е най-голямата страна, то $\sphericalangle ACB=120^\circ$.

Да означим допирните точки на окръжността със страните AC и BC съответно с T и Q. Намираме $AT=AP=5$ и $BQ=BP=9$. Нека $CQ=CT=x, x>0$.

Прилагаме косинусова теорема за $\triangle ABC$: $14^2=\left(x+5\right)^2+\left(x+9\right)^2-2\left(x+5\right)\left(x+9\right)\cos 120^\circ$

$\Leftrightarrow x^2+14x-15=0$. Оттук $x=1$ или $x=-15$. Намираме $AC=6,\ BC=10$.

Ако CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$, то $\frac{AL}{BL}=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{5}$.

Нека $AL=3y, BL=5y$ и $3y+5y=14\Leftrightarrow y=\frac{7}{4}$. Тогава $AL=\frac{21}{4}$ и $BL=\frac{35}{4}$, а

$$CL^2 = AC.BC - AL.BL \Rightarrow CL = \sqrt{6.10 - \frac{21}{4}.\frac{35}{4}} = \frac{15}{4}.$$

За намиране на $\sin\sphericalangle ACB = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	**1 точка**
За определяне на $\sphericalangle ACB = 120°$.	**1 точка**
За определяне на $AT = AP = 5$ и $BQ = BP = 9$.	**1 точка**
За въвеждане на неизвестно $CQ = CT = x, x > 0$.	**1 точка**
За прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABC$.	**1 точка**
За достигане до уравнението $x^2 + 14x - 15 = 0$ и решаването му.	**2 точки**
За определяне дължините на страните AC и BC	**1 точка**
За изразяване на $AL.BL$ или намиране на дължините на AL и BL.	**1 точка**
За намиране на дължината на $CL = \frac{15}{4}$.	**1 точка**