МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

31.05.2019 г. – Вариант 2

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Стойността на израза $2^{1+\frac{1}{2}\log_2 6}$ **е:**

А) $2\log_2 6$ **Б)** $2\sqrt{6}$ **В)** $6\sqrt{2}$ **Г)** 9

Задача 2. Стойността на израза $\sqrt{(-9)^2}.\sqrt{3^{-6}}$ **е:**

А) $-\frac{1}{3}$ **Б)** $\frac{1}{3}$ **В)** 1 **Г)** 3

Задача 3. Множеството от допустимите стойности на израза $\frac{x^2-1}{x^2-3x+4}+\frac{x-1}{x^2+1}$ **е:**

А) $\varnothing$ **Б)** $(-\infty; 1)\cup(1; \infty)$ **В)** $(-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; \infty)$ **Г)** $\mathbb{R}$

Задача 4. Решенията на неравенството $\frac{2x-3}{x-7}<1$ **са:**

А) $x\in(-\infty;-4)$ **Б)** $x\in(-\infty;2)\cup(8;+\infty)$ **В)** $x\in(-4;7)$ **Г)** $x\in(-\infty;-4)\cup(7;+\infty)$

Задача 5. Ако за числата m, n **и** k **е изпълнено** $\left(\frac{8}{3}\right)^m > \left(\frac{8}{3}\right)^n$ **и** $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^k$**, то:**

А) $m>n>k$ **Б)** $k>n>m$ **В)** $m>k>n$ **Г)** $n>k>m$

Задача 6. Коя от посочените наредени двойки числа е решение на системата $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}$ **?**

А) $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ **Б)** $\left(\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$ **В)** $(3,-1)$ **Г)** $(1,3)$

Задача 7. На кое от посочените уравнения са корени числата $\sqrt{2}$ **и** $-\sqrt{5}$ **?**

А) $x^4-\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)x^2-\sqrt{10}=0$ **Б)** $x^4+7x^2+10=0$

В) $x^4-7x^2+10=0$ **Г)** $x^4-7x^2-10=0$

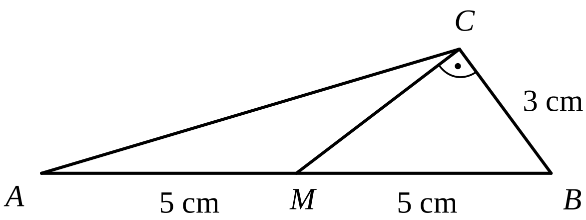
Задача 8. Изразът $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$ **е тъждествено равен на:**

А) $\sin\alpha\cos\alpha$ **Б)** $\sin 2\alpha$ **В)** 0 **Г)** 2

Задача 9. В равнобедрен триъгълник с основа 10 **cm центърът на вписаната окръжност дели височината към основата в отношение** 3:1**. Периметърът на триъгълника е:**

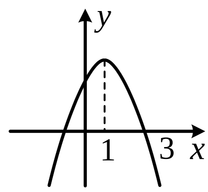
А) 20 **cm** **Б)** 30 **cm** **В)** 40 **cm** **Г)** $50\sqrt{2}$ **cm**

Задача 10. В $\triangle ABC$ **медианата** $CM \perp BC$**,** MB **=** 5 **cm и** BC **=** 3 **cm. Дължината на страната** AC **е:**



А) 8 **cm** **Б)** $6\sqrt{2}$ **cm** **В)** $\sqrt{73}$ **cm** **Г)** $5\sqrt{3}$ **cm**

Задача 11. Параболата от чертежа е графиката на функцията:



А) $y=4-(x-1)^2$ **Б)** $y=4-(x+1)^2$

В) $y=1-(x-2)^2$ **Г)** $y=(x-1)^2-4$

Задача 12. Шестият член на редицата с общ член $a_n=3(n+3), n\in\mathbb{N}$**, е член и на редицата с общ член** $b_m=m(m-6), m\in\mathbb{N}$**. Тогава** m **е равно на:**

А) 3 **Б)** 6 **В)** 9 **Г)** 27

Задача 13. За крайна аритметична прогресия е дадено, че $a_1=-11$, $a_2=-8$, $S_n=25$ $(n\in\mathbb{N})$. Да се намери броят n на членовете ѝ.

А) 18 **Б)** 10 **В)** 5 **Г)** 3

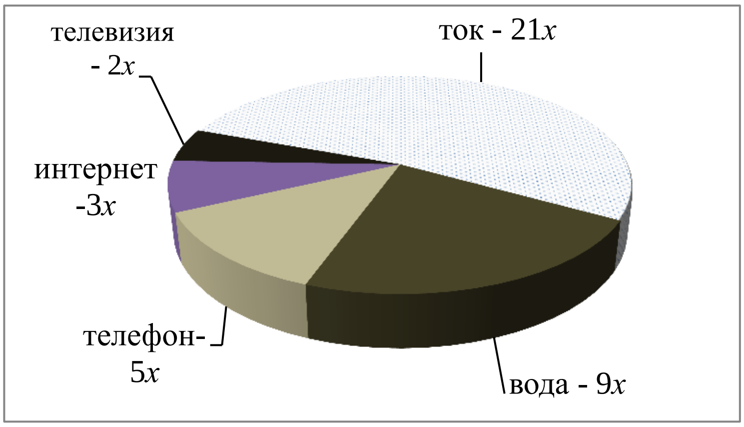
Задача 14. Стойността на израза $\sin(\alpha+45°)\cos\alpha+\cos(\alpha+45°)\sin\alpha$ **при** $\alpha=-45°$ **е:**

А) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Б)** 0 **В)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Г)** $\sqrt{2}$

Задача 15. Отговорите на няколко човека на въпроса: „Коя е любимата ви цифра?“ са: $0, 4, 4, 6, 5, 3, 5, 7, 4, 8, 6, 7, 7, 1, 0, 7, 7, 0$. **Разликата** $M-S$ **между медианата** M **и средноаритметичното** S **на статистическия ред е:**

А) – 1 **Б)** $-0,5$ **В)** 0 **Г)** $0,5$

Задача 16. На кръговата диаграма е изобразено съотношението на разходите за ток, вода, телефон, интернет и телевизия на едно семейство през месец март. Най-голямата сметка е тази за ток. Ако е известно, че сборът от останалите сметки е 133 **лв., то разходите за ток са:**

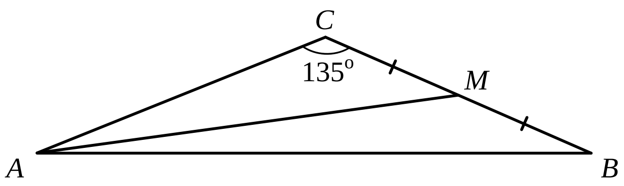


А) 140 **лв.** **Б)** 142 **лв.** **В)** 145 **лв.** **Г)** 147 **лв.**

Задача 17. Намерете дължината на радиуса на описаната окръжност около $\triangle ABC$ **, за който** $AB=\sqrt{51}$ **cm и** $\cos\sphericalangle ACB=0,7$**.**

А) $\frac{\sqrt{51}}{10}$ **cm** **Б)** $\frac{\sqrt{51}}{5}$ **cm** **В)** 5 **cm** **Г)** 10 **cm**

Задача 18. В $\triangle ABC$ **със страна** $AC = 3$**cm и** $\sphericalangle ACB = 135^\circ$ **точката** M **е средата на** BC**. Ако** $AM = \sqrt{17}$ **cm, то дължината на страната** BC **е:**



А) $\sqrt{2}$ **cm** **Б)** 2 **cm** **В)** $2\sqrt{2}$ **cm** **Г)** $4\sqrt{2}$ **cm**

Задача 19. Трапецът $ABCD$ **е с основи** $AB = 15$ **cm,** $CD = 5$ **cm и диагонали** $AC = 12$ **cm и** $BD = 16$ **cm. Лицето на трапеца е:**

А) 120 **cm²** **Б)** 96 **cm²** **В)** 94 **cm²** **Г)** 75 **cm²**

Задача 20. В успоредника $ABCD$ **диагоналът** $BD = \sqrt{3}$ **cm сключва със страните** AB **и** BC **ъгли съответно равни на** 30° **и** 120°**. Дължината на диагонала** AC **е:**

А) $\sqrt{3}$ **cm** **Б)** 3 **cm** **В)** $\sqrt{21}$ **cm** **Г)** 21 **cm**

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

31.05.2019 г. – Вариант 2

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

Задача 21. Намерете стойността на израза $A=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$, **ако** $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Задача 22. Намерете решенията на неравенството $\dfrac{x^2-1}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2-1}\leq 2.$

Задача 23. Първият член на геометрична прогресия е равен на 2**, а шестият ѝ член е равен на** 64**. Намерете сбора от първите пет члена на прогресията.**

Задача 24. Децата в клуб по интереси са разделени на три групи. В две от групите има съответно 5 **и** 4 **деца. Броят на начините да се състави отбор от** 6 **деца, в който се включват по** 2 **деца от всяка група, е** 900**. Колко са децата в клуба?**

Задача 25. В $\triangle ABC$ **е вписана окръжност с радиус** $r=2$ **cm, която се допира до страната** AB **в точка** T**. Намерете лицето на триъгълника, ако** $AT=BC=6$ **cm.**

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

Задача 26. Докажете тъждеството $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \dfrac{\sin 6\alpha}{1 + \cos 6\alpha}$ **за всички допустими стойности на** α**.**

Задача 27. Решете уравненията $\sqrt{3x^2 - 2x} - 4 = 0$ **и** $\sqrt{x^2 + 6x} - 3x + 2 = 0$ **и намерете сбора от корените им.**

Задача 28. В $\triangle ABC$ **с дължини на страните** $AC = 3$ **cm,** $BC = 5$ **cm и** $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ **е построена ъглополовящата** CL $(L \in AB)$ **и медианата** CM $(M \in AB)$**. Намерете дължините на** CL**, на** CM**, на радиуса** r **на вписаната в** $\triangle ALC$ **окръжност и на радиуса** R **на описаната окръжност около** $\triangle BCM$ **.**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

31.05.2019 г. – Вариант 2

Ключ с верните отговори

№	Верен отговор	Брой точки
1	**Б**	**2**
2	**Б**	**2**
3	**Г**	**2**
4	**В**	**2**
5	**А**	**2**
6	**Г**	**2**
7	**В**	**2**
8	**Б**	**2**
9	**В**	**2**
10	**В**	**2**
11	**А**	**3**
12	**В**	**3**
13	**Б**	**3**
14	**А**	**3**
15	**Г**	**3**
16	**Г**	**3**
17	**В**	**3**
18	**В**	**3**
19	**Б**	**3**
20	**В**	**3**
21	$A=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$	**4**
22	$(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$	**4**
23	62	**4**
24	15	**4**
25	24 cm^2	**4**
26		**10**

27	$\dfrac{8}{3}=2\dfrac{2}{3}$	**10**
28	$CL=\dfrac{15}{8}$ cm, $CM=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ cm, $r=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ cm, $R=\dfrac{7\sqrt{57}}{18}$ cm	**10**

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Решение на задача 26:

$$A=\frac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}\overset{(1)}{=}\frac{2\sin 3\alpha.\cos(-\alpha)-\sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha.\cos(-\alpha)-\cos 3\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha.\cos\alpha-\sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha.\cos\alpha-\cos 3\alpha}\overset{(2)}{=}$$

$$=\frac{\sin 3\alpha.(2\cos\alpha-1)}{\cos 3\alpha.(2\cos\alpha-1)}\overset{(3)}{=}\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$$

$$B=\frac{\sin 6\alpha}{1+\cos 6\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha.\cos 3\alpha}{1+\cos 6\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha.\cos 3\alpha}{2\cos^2 3\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}(4)$$

$\Rightarrow A=B$.

За правилно прилагане на всяка от двете формули за сбор на синуси и косинуси в стъпка (1)	**по 1 точка**
За достигане до финала на стъпка (2)	**1 точка**
За стъпка (3)	**2 точки**
За прилагане на формулата за синус на удвоения ъгъл	**1 точка**
За прилагане на формулата $1+\cos 6\alpha=2\cos^2 3\alpha$	**2 точки**
За окончателно достигане до края на (4)	**1 точка**
За извода $A=B$	**1 точка**

Решение на задача 27:

Търсим корените на уравнението $\sqrt{x^2+6x}=3x-2$ и на уравнението $\sqrt{3x^2-2x}=4$.

$\sqrt{x^2+6x}=3x-2\Rightarrow x^2+6x=9x^2-12x+4\Leftrightarrow 4x^2-9x+2=0$

Корените на уравнението са $x_1=2$ и $x_2=\dfrac{1}{4}$. Проверката показва, че $x_2=\dfrac{1}{4}$ е чужд корен, а $x_1=2$ е решение на уравнението.

$\sqrt{3x^2-2x}=4\Leftrightarrow 3x^2-2x=16\Leftrightarrow 3x^2-2x-16=0$

Корените на уравнението са $x_3 = -2$ и $x_4 = \frac{8}{3}$, които са и решения на уравнението.

Тогава сборът от корените е: $2 - 2 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$.

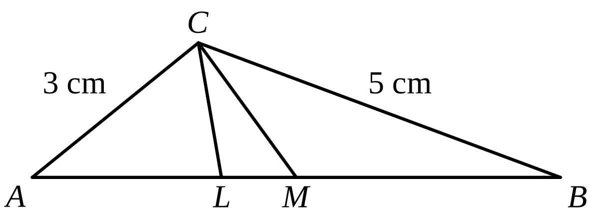
За достигане до квадратното уравнение $4x^2 - 9x + 2 = 0$ и решаването му.	**3 точки**
Извод, че $x_1 = 2$ е решение.	**1 точка**
Извод, че $x_2 = \frac{1}{4}$ е чужд корен.	**1 точка**
За достигането до квадратното уравнение $3x^2 - 2x - 16 = 0$ и решаването му.	**2 точки**
Извод, че $x_3 = -2$ е решение.	**1 точка**
Извод, че $x_4 = \frac{8}{3}$ е решение.	**1 точка**
За намиране на сбора от корените.	**1 точка**

Решение на задача 28:

От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ определяме

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 120^\circ =$

$= 9 + 25 + 2.3.5.\frac{1}{2} = 49$ и $AB = 7$ cm.



Тогава $4CM^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2 = 18 + 50 - 49 = 19$ и $CM = \frac{\sqrt{19}}{2}$ cm.

От свойството на ъглополовящата следва, че $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$, $AL = \frac{3}{8}AB = \frac{21}{8}$ cm,

$BL = \frac{5}{8}AB = \frac{35}{8}$ cm, $CL^2 = AC.BC - AL.BL = 3.5 - \frac{21}{8}.\frac{35}{8} = \frac{15^2}{8^2}$ и $CL = \frac{15}{8}$ cm.

Пресмятаме лицата на $\triangle ABC$, $\triangle ALC$ и $\triangle BMC$:

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm^2, $S_{\triangle ALC} = \frac{3}{8}S_{\triangle ABC} = \frac{45\sqrt{3}}{32}$ cm^2 и

$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{8}$ cm^2.

Полупериметърът на $\triangle ALC$ е $p=\frac{1}{2}(AC+AL+CL)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{21}{8}+\frac{15}{8}\right)=\frac{15}{4}$ cm и от равенството $S_{\triangle ALC}=pr$ намираме $r=\frac{S_{\triangle ALC}}{p}=\frac{45\sqrt{3}.4}{32.15}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ cm.

От формулата $S_{\triangle BMC}=\frac{BM.BC.CM}{4R}$ получаваме

$$R=\frac{BM.BC.CM}{4S_{\triangle BMC}}=\frac{7.5.\sqrt{19}.8}{2.2.4.15\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{57}}{18}\text{ cm}.$$

Намиране на дължината на $AB=7$ cm.	**1 точка**
Определяне лицето на $\triangle ABC$: $S_{\triangle ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm^2.	**1 точка**
Определяне на $CM=\frac{\sqrt{19}}{2}$ cm.	**2 точки**
Определяне на $CL=\frac{15}{8}$ cm.	**2 точки**
Определяне на $r=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ cm.	**2 точки**
Определяне на $R=\frac{7\sqrt{57}}{18}$ cm.	**2 точки**

Забележка:

1. Намирането на ъглополовящата CL може да се направи и като се използва, че $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ALC}+S_{\triangle BLC}=\frac{1}{2}(AC+BC)CL.\sin 60^\circ$.

2. Намирането на радиуса R на описаната окръжност около $\triangle BMC$ може да бъде чрез определяне на $\cos\sphericalangle BMC$ (чрез прилагане на косинусова теорема за $\triangle BMC$), $\sin\sphericalangle BMC$ и $R=\frac{5}{2\sin\sphericalangle BMC}=\frac{5}{2.\frac{15\sqrt{57}}{133}}=\frac{7\sqrt{57}}{18}$ cm.