<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

02.06.2020 г. – Вариант 2

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Ако $x=\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 3}$ **, то** x **е равно на:**

А) -3 **Б)** $-\frac{1}{3}$ **В)** $\frac{1}{3}$ **Г)** 3

2. Произведението $2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}.4^{\frac{1}{4}}$ **е равно на:**

А) $2\sqrt[3]{3}$ **Б)** $3\sqrt{2}$ **В)** $\sqrt[12]{24}$ **Г)** $2\sqrt[4]{54}$

3. Множеството от допустимите стойности на израза $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}+\frac{x+2}{x^2-4}$ **е:**

А) $(-\infty;\,-2)\cup(2;\,\infty)$ **Б)** $(-\infty;\,-2)\cup(-2;\,2)\cup(2;\,\infty)$

В) $(-\infty;\,2)\cup(2;\,\infty)$ **Г)** $(-2;\,2)\cup(2;\,\infty)$

4. Множеството от реалните корени на уравнението $\left(x^2-9\right)\left(1-\frac{1}{x-3}\right)=0$ **е:**

А) $\{-3;0\}$ **Б)** $\{-3;3\}$ **В)** $\{0;3\}$ **Г)** $\{-3;4\}$

5. Върхът на параболата, графика на функцията $f(x)=-3x^2+6x-3$**, е точката с координати:**

А) $(0;-3)$ **Б)** $(2;-3)$ **В)** $(-1;-12)$ **Г)** $(1;0)$

6. Броят на наредените двойки числа $(x;y)$, които са решения на системата $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=10 \\ xy=-3 \end{array}\right.$

и са координати на точки от четвърти квадрант, е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

7. Сборът от реципрочните стойности на корените на уравнението $2x^2-11x+12=0$ **е:**

А) $\frac{11}{2}$ **Б)** $\frac{11}{12}$ **В)** $\frac{2}{11}$ **Г)** $\frac{1}{6}$

8. Ако $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \alpha\in(0°;90°)$**, то стойността на** $\mathrm{cotg}\alpha$ **е:**

А) $\frac{4}{3}$ **Б)** $\frac{5}{4}$ **В)** $\frac{4}{5}$ **Г)** $\frac{3}{4}$

9. Дължините на страните на ΔABC **са** $AC=BC=4$ cm, $AB=4\sqrt{2}$ cm**, а периметърът на подобния му** $\Delta A_1B_1C_1$ $(\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1)$ **е** $\left(8+8\sqrt{2}\right)$ cm**. Дължината на страната** A_1B_1 **е:**

А) $2\sqrt{2}$ cm **Б)** 4 cm **В)** 8 cm **Г)** $8\sqrt{2}$ cm

10. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB=90°$, **а височината към хипотенузата е** CH = 5**. Ако** $AH:BH=4:1$, **намерете дължината на хипотенузата**.

А) $\frac{25}{4}$ **Б)** $\frac{25}{2}$ **В)** 15 **Г)** 25

11. Графиката на коя от посочените функции има за ос на симетрия правата $x=2$ **и минава през точката с координати** $(2;-1)$**?**

А) $y=1-x$ **Б)** $y=x^2-4x+5$ **В)** $y=x^2-2x-1$ **Г)** $y=-3x^2+12x-13$

12. За числовите редици с общи членове a_n **и** b_n **са в сила равенствата** $a_n=2b_{n+1}+1$**, за всяко естествено число** $n\geq1$ **и** $b_n=2b_{n-1}-1$**, за всяко естествено число** $n\geq2$**, а** $b_1=2$**. Първите 4 члена на редицата** $\{a_n\}$ **са:**

А) 2, 3, 5, 9 **Б)** 5, 7, 9, 11 **В)** 7, 11, 15, 19 **Г)** 7, 11, 19, 35

13. Сумата на членовете на крайна аритметична прогресия е 105. Ако първият член е 10, а разликата е $\frac{5}{3}$, то броят на членовете е:

А) 4 **Б)** 7 **В)** 18 **Г)** 58

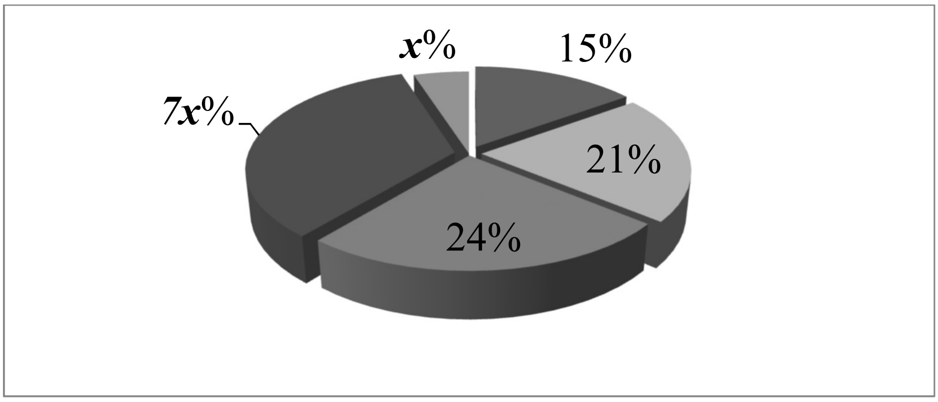
14. Стойността на израза $\cos 105° + \sin 75°$ е:

А) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. По случаен начин се избира естествено число n, $n \in [26;97]$. Каква е вероятността то да е записано с две нечетни цифри?

А) $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{2}{9}$ **В)** $\frac{19}{72}$ **Г)** $\frac{25}{72}$

16. На диаграмата в проценти е показано производството на различни видове автомобили от една фирма. Луксозните автомобили са x% от всички произведени автомобили. Броят на малолитражните автомобили е 7 пъти по-голям от броя на луксозните автомобили. Намерете градусната мярка на ъгъла на сектора, отговарящ на луксозните автомобили, произведени от тази фирма.



А) $5°$ **Б)** $15°$ **В)** $18°$ **Г)** $20°$

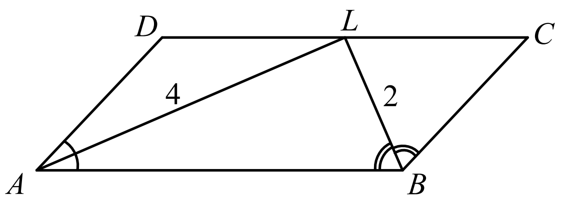
17. В $\triangle ABC$ **точка** M **лежи на страната** AB **и** $AM : MB = 2 : 1$. **Ъглополовящата на** $\sphericalangle BAC$ **пресича** CM **в точка** N **и** BC **в точка** L. **Ако** $CN : NM = 3 : 2$ **и** $BL = 12$, **то дължината на страната** BC **е:**

А) 18 **Б)** 24 **В)** 30 **Г)** 36

18. В $\triangle ABC$ **е дадено** $AC = 8$, $AB = BC + 2$ **и** $\sphericalangle ACB = 60°$. **Дължината на страната** BC **е:**

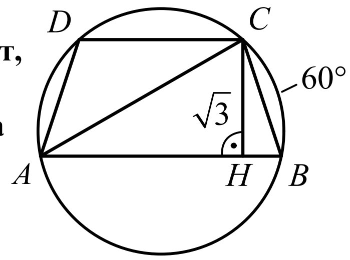
А) 10 **Б)** 8 **В)** 5 **Г)** 4

19. В успоредника $ABCD$ **ъглополовящите на ъглите при върховете му** A **и** B **се пресичат в точка** L **от страната** DC. **Ако** $AL = 4$ dm, $BL = 2$ dm**, то дължината на** BC **е:**



А) $\sqrt{5}$ dm **Б)** 3 dm **В)** $2\sqrt{3}$ dm **Г)** 3,5 dm

20. Трапецът $ABCD\,(AB \parallel CD)$ **е вписан в окръжност,** $CH = \sqrt{3}$ cm **е негова височина, а** $\overset{\frown}{BC} = 60°$. **Лицето на трапеца е равно на:**



А) $\sqrt{3}$ cm^2 **Б)** 3 cm^2 **В)** $3\sqrt{3}$ cm^2 **Г)** 6 cm^2

.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $D=b^2-4ac$ $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $a^{\log_a b}=b$ $\log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

02.06.2020 г. – Вариант 2

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. Ако $a = 2, b = \sqrt{5}$**, то намерете стойността на израза** $A = \dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)}{\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}$.

22. Намерете множеството от решенията на неравенството $\left(x^2 - 4x\right)^2 < -4\left(x^2 - 4x\right)$.

23. Между числата 5 **и** 405 **са записани** 3 **числа, които заедно с дадените образуват растяща геометрична прогресия. Намерете сбора на записаните три числа.**

24. В таблицата са дадени резултатите от тест на група курсисти.

Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Младежи	1	4	x	2	3
Девойки	0	3	5	y	4

Броят на курсистите, получили оценка 5**, е равен на медианата на оценките на младежите. Намерете общия брой на курсистите, ако средният успех на групата е** 4,30.

25. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ **с основа** $AB = 10$ cm **и** $\sphericalangle BAC = \alpha,$ **като** $\text{tg}\alpha = \sqrt{7}$. **Намерете дължината на радиуса на описаната около триъгълника окръжност.**

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Дадена е функцията $f(x)=2\left(x-1-\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{x^2-3x}$**.**

а) Определете дефиниционното ѝ множество.

б) Решете уравнението $f(x)=x^2-x-2$**.**

27. Докажете тъждеството $\dfrac{\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}\alpha+2}{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$ **за всички допустими стойности на изразите.**

28. Точките C **и** D **лежат на полуокръжност** k **с диаметър** $AB=12\text{ cm}$ **така, че** C **е среда на дъгата** $\overset{\frown}{BD}$**. Пресечната точка** P **на диагоналите на четириъгълника** $ABCD$ **дели** BD **в отношение** $DP:PB=1:2$**. Намерете дължините на страните и на диагоналите, мерките на ъглите и лицето на четириъгълника** $ABCD$**.**

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

02.06.2020 г. – Вариант 2

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	**В**	**2**
2	**А**	**2**
3	**Б**	**2**
4	**Г**	**2**
5	**Г**	**2**
6	**В**	**2**
7	**Б**	**2**
8	**А**	**2**
9	**В**	**2**
10	**Б**	**2**
11	**Г**	**3**
12	**Г**	**3**
13	**Б**	**3**
14	**Г**	**3**
15	**В**	**3**
16	**В**	**3**
17	**Б**	**3**
18	**В**	**3**
19	**А**	**3**
20	**В**	**3**
21	-1	**4**
22	$x \in (0;\, 2) \cup (2;\, 4)$ **или** $x \in (0;\, 4) \setminus \{2\}$	**4**
23	195	**4**
24	30	**4**

25	$R=\dfrac{20}{\sqrt{7}}=\dfrac{20\sqrt{7}}{7}$ cm	**4**
26	-1 **и** 4	**10**
27		**10**
28	$BC=CD=AD=6\,\text{cm}$ $BD=AC=6\sqrt{3}$ cm $60°,120°,60°,120°$ $S=27\sqrt{3}$ cm^2	**10**

Задача 26.

Решение: а) Дефиниционното множество *DM* на функцията се определя от решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x^2-3x\geq 0 \\ x\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x(x-3)\geq 0 \\ x\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;\,0)\,\cup\,[3;\,\infty)$.

б) При $x\in DM$:

$$2\left(x-1-\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2-3x}=x^2-x-2 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-x-2\right)}{x}\sqrt{x^2-3x}=x^2-x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x-2\right)\sqrt{x^2-3x}-x\left(x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(2\sqrt{x^2-3x}-x\right)=0.$$

1. $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_1=-1\in DM$, $x_2=2\notin DM$.

2. $2\sqrt{x^2-3x}=x$.

Повдигаме в квадрат и получаваме уравнението $4x^2-12x=x^2 \Leftrightarrow 3x(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_3=0\notin DM$, $x_4=4\in DM$.

С проверка установяваме, че $x_4=4$ е решение $\left(2\sqrt{16-12}=4\right)$.

Следователно даденото уравнение има две решения: -1 и 4.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Етапи	**Оценяване**
а) За намиране на *DM:* $x\in(-\infty;\,0)\,\cup\,[3;\,\infty)$	**2 точки**

б) Представяне на уравнението във вида $\left(x^2-x-2\right)\left(2\sqrt{x^2-3x}-x\right)=0$	**1 точка**
Намиране на корените на уравнението $x^2-x-2=0$	**1 точка**
Установяване, че $x=2$ не е решение	**1 точка**
Установяване, че $x=-1$ е решение	**1 точка**
Решаване на уравнението $2\sqrt{x^2-3x}=x$	**2 точки**
Направен извод, че $x=0\notin DM$	**1 точка**
Извод, че само $x=4$ е корен	**1 точка**

Задача 27

Първи начин :

Решение: Образуваме разликата

$$\frac{\operatorname{tg}\left(90^\circ-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha+2}{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha+2}{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{\left(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha+2\right)\left(1-\operatorname{tg}\alpha\right)-\left(\operatorname{tg}\alpha+1\right)\left(\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)}{\left(\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha+2-1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-1-\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\left(\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}\alpha\right)}=0$$

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За прилагане на формулата $\operatorname{tg}\left(90^\circ-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha$	**1 точка**
За привеждане под общ знаменател	**1 точка**
За всяко прилагане на формулата $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha=1$ по една точка	**2 точки**
За правилно разкриване на скобите (за всяка двойка скоби по една точка)	**2 точки**
За тъждествени преобразувания след разкриване на скобите	**2 точки**
За окончателно довършване и извод, че равенството е тъждество	**2 точки**

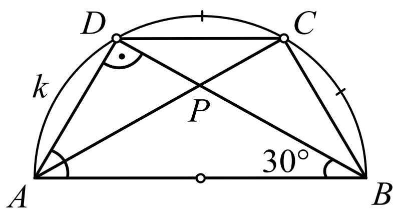
Втори начин:

За прилагане на формулата $\operatorname{tg}\left(90^\circ-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha$	**1 точка**

За прилагане на формулата $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	**1 точка**
За прилагане на тъждеството $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	**1 точка**
За стъпката $\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$	**1 точка**
За стъпката $\dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}} = \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$	**1 точка**
За всяка от формулите в числителя и знаменателя по една точка или за $\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}$	**2 точки**
За стъпката $\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$	**1 точка**
За стъпката $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)}{\cos\alpha(1-\mathrm{tg}\alpha)}$	**1 точка**
За $\dfrac{\cos\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)}{\cos\alpha(1-\mathrm{tg}\alpha)} = \dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}$	**1 точка**

Задача 28.

Решение:



От $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ следва, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$ (вписани ъгли), AP е ъглополовяща в $\triangle ABD$ и $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DP}{PB} = \dfrac{1}{2}$.

В $\triangle ABD$ с $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ (AB е диаметър на k и $D \in k$) и от $AD = \dfrac{1}{2}AB$ следва, че $\sphericalangle ABD = 30^\circ$ и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$.

Тогава $\overset{\frown}{AD} = 2\sphericalangle ABD = 60^\circ$, $\overset{\frown}{BCD} = 120^\circ$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 60^\circ$, $\sphericalangle ABC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ADC} = 60^\circ$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 120^\circ$ и $ABCD$ е равнобедрен трапец.

В $\triangle ABD$ $BD = AB.\sin 60° = 12.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

Дължините на страните на четириъгълника $ABCD$ са $AB = 12$ cm (по условие), $BC = CD = AD = \frac{1}{2}AB = 6$ cm, а на диагоналите – $AC = BD = 6\sqrt{3}$ cm.

Като вземем предвид, че $\sphericalangle BPC = 60°$ (външен ъгъл за $\triangle APB$), лицето на четириъгълника е $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\sphericalangle BPC = \frac{1}{2}.6\sqrt{3}.6\sqrt{3}.\sin 60° = 54.\frac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$ cm^2.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Доказване, че AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$	**1 точка**
Намиране $\frac{AD}{AB} = \frac{DP}{PB}$ от ъглополовящата AP в $\triangle ABD$	**2 точки**
Намиране на $\sphericalangle ABD = 30°$	**1 точка**
Намиране на $\sphericalangle BAD = 60°$	**1 точка**
Намиране на страните AD, BC и CD	**1 точка**
Намиране на ъглите $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC = 120°$	**1 точка**
Намиране на диагоналите $BD = AC = 6\sqrt{3}$ cm	**1 точка**
Намиране на лицето $S = 27\sqrt{3}$ cm^2	**2 точки**