<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

28.08.2020 г. – Вариант 2

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Дадени са числата: $a = \sqrt[3]{-27}$, $\quad b = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{-2}$, $\quad c = 2.6^{\frac{1}{2}}$**. Вярното неравенство е:**

А) $a < b < c$ **Б)** $b < c < a$ **В)** $a < c < b$ **Г)** $c < a < b$

2. **Числената стойност на израза** $\sqrt[3]{3^5} - 8.\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{3}} + 6.3^{\frac{5}{3}}$ **е:**

А) $3^{\frac{5}{3}}$ **Б)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$ **В)** $-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$ **Г)** $-3^{\frac{5}{3}}$

3. Множеството от недопустимите стойности на израза $\dfrac{x-1}{x^2-x} + \dfrac{x}{x^2-2}$ **е:**

А) $\{-1, 0, 1, 2\}$ **Б)** $\{-2, 0, 2\}$ **В)** $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$ **Г)** $\{-\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}\}$

4. Интервалът $(2;5)$ **е решението на неравенството**:

А) $x^2 - 7x + 10 > 0$ **Б)** $-x^2 + 5x - 6 > 0$ **В)** $-x^2 + 7x - 10 > 0$ **Г)** $x^2 + 5x + 6 > 0$

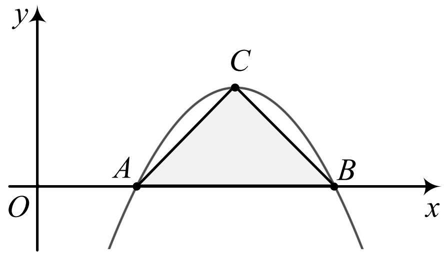
5. Стойността на израза $5^{2-2\log_5\sqrt{3}}$ **е:**

А) $\sqrt{\dfrac{25}{3}}$ **Б)** $\dfrac{25}{3}$ **В)** $25\sqrt{3}$ **Г)** 75

6. Ако x_1 **и** x_2 **са корени на уравнението** $2x^2 - 5x + 1 = 0$**, то стойността на израза** $-2x_1 + 6x_1x_2 - 2x_2$ **е:**

А) – 4 **Б)** – 2 **В)** 2 **Г)** 4

7. Графиката на функцията $y = -x^2 + 4x - 3$ **е показана на чертежа. Точките** A **и** B **са пресечните ѝ точки с абсцисната ос, а точката** C **е върхът на параболата. Лицето на** $\triangle ABC$ **е:**

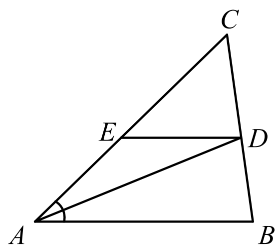


А) 1 **Б)** 1,4 **В)** 1,5 **Г)** 2

8. Изразът $\sin(30° - \alpha) - \sin(30° + \alpha)$ **е тъждествено равен на :**

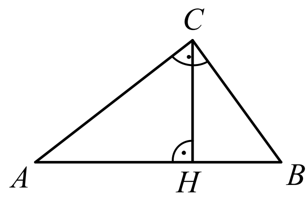
А) $-\sqrt{3}\sin\alpha$ **Б)** $-2\sin 2\alpha$ **В)** $\cos\alpha$ **Г)** $2\sin 2\alpha$

9. Вътрешната ъглополовяща на ъгъла при върха A **в** $\triangle ABC$ **пресича страната** BC **в точка** D**. Права през** D**, успоредна на** AB**, пресича страната** AC **в точка** E**. Ако** AB = 10 **и** AC = 15**, намерете на дължината на** DE**.**



А) 5 **Б)** 6 **В)** 7,5 **Г)** 9

10. В правоъгълния $\triangle ABC$, CH $(H \in AB)$ **е височината към хипотенузата. Ако** $BC : AC = \sqrt{2} : \sqrt{3}$, **то отношението** $CH : AB$ **е:**



А) $\sqrt{6} : 5$ **Б)** $2 : 3$ **В)** $4 : 9$ **Г)** $6 : 25$

11. Произведението на най-малкия и най-големия корен на уравнението $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ **е:**

А) 2 **Б)** $\sqrt{2}$ **В)** $-\sqrt{2}$ **Г)** -2

12. Първите два члена на числова редица са $a_1 = -1$ и $a_2 = 2$. Ако формулата за общия член е $a_n = n\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right)$ за всяко $n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}$, то a_5 е:

А) 95 **Б)** 28 **В)** 25 **Г)** 5

13. За членовете на растяща геометрична прогресия са в сила равенствата $a_1 + a_3 = -5$ и $a_2 = -2$. Частното на прогресията е:

А) -2 **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 2

14. Ако $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, стойността на израза $\sin\alpha . \cos\alpha$ е:

А) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **Б)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **В)** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ **Г)** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

15. В танцова група има 8 момичета и 2 момчета. По колко различни начини може да направим група от 3 танцьори, в която има поне едно момче?

А) 56 **Б)** 64 **В)** 72 **Г)** 120

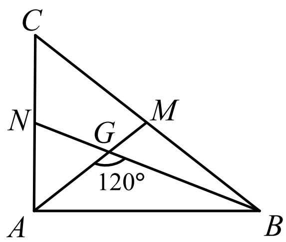
16. За средноаритметичната стойност S, модата M и медианата N на статистическия ред $1,1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,5,5,5,5,6,6$ вярната подредба във възходящ ред е:

А) $N < M < S$ **Б)** $S < N < M$ **В)** $S < M < N$ **Г)** $M < S < N$

17. Радиусът на окръжността, описана около $\triangle ABC$, е $10\sqrt{3}$. Ако $\sphericalangle BAC : \sphericalangle ABC : \sphericalangle BCA = 1:3:8$, дължината на най-голямата страна на $\triangle ABC$ е:

А) 15 **Б)** 30 **В)** 40 **Г)** 60

18. Даден е $\triangle ABC$ с медицентър точка G и медиани $AM = 9$ cm и $BN = 15$ cm. Ако $\sphericalangle AGB = 120°$, то дължината на страната AB е:



А) $7\sqrt{2}$ cm **Б)** $6\sqrt{3}$ cm **В)** 12 cm **Г)** 14 cm

19. Върху продълженията на диагоналите AC **и** BD **на четириъгълника** $ABCD$ **са построени отсечки** CC_1 **и** DD_1 **съответно равни на диагоналите** AC **и** BD (**точка** C **е между точка** A **и точка** C_1**, точка** D **е между** B **и** D_1**). Ако лицето на** $ABCD$ **е** 3 cm^2**, то лицето на** ABC_1D_1 **е:**

А) 6 cm^2 **Б)** 9 cm^2 **В)** 12 cm^2 **Г)** 18 cm^2

20. Най-малката височина на $\triangle ABC$ **със страни** $AB = 7$ cm**,** $BC = 5$ cm **и** $AC = 3$ cm **има дължина:**

А) $\frac{15\sqrt{3}}{14}$ cm **Б)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm **В)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm **Г)** $5\sqrt{3}$ cm

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c{}^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

28.08.2020 г. – Вариант 2

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

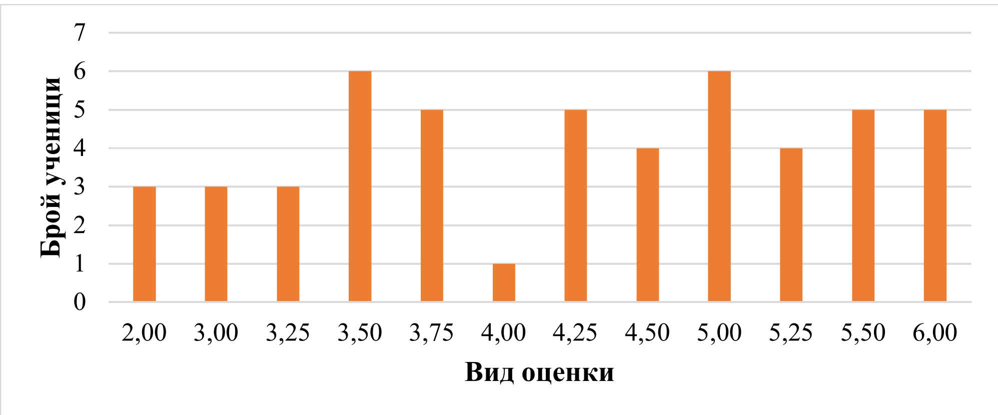
<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. Ако $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, **намерете стойността на израза** $\frac{x^3+y^3}{2\sqrt{x^4-y^4}}\cdot\frac{3y(x-y)}{x^3-x^2y+xy^2}$.

22. При стандартните означения за страните на $\triangle ABC\,(AC=b,\ BC=a)$ **е дадено, че** $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{11}$ **и** $\sin\sphericalangle BAC=\frac{3}{5}$. **Намерете градусната мярка на** $\sphericalangle ABC$**.**

23. Намерете първия член на аритметичната прогресия $a_1, a_2, ..., a_9, a_{10}$**, сумата на членовете на която е** $S_{10}=2020$ **и** $(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})-(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=20$**.**

24. На диаграмата е посочен броят на учениците и съответната им оценка от проведен изпит. Намерете колко процента от явилите се ученици са получили оценка *„много добър“ (оценка* от 4,50 до 5,49).



25. Ако за линейната функцията $f(x)$ е изпълнено $f(-3)=-16$ и $f(4)=5$, то намерете $f(2)$.

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Даден е изразът $A=\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha$.

а) Докажете, че $A=\frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

б) Пресметнете стойността на *A*, ако $\operatorname{tg}4\alpha=2$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right)$.

27. Дадени са функциите $f(x)=\sqrt{(x-2)(x+1)}$ и $g(x)=(x-2)\sqrt{x-3}$.

а) Определете дефиниционното множество на всяка от функциите.

б) Решете уравнението $f(x)=g(x)$.

28. В успоредник *ABCD* с $\sphericalangle BAD=60^\circ$ описаната около $\triangle ABD$ окръжност е с радиус $R=\sqrt{21}$ cm и пресича страната *CD* в точка *M* така, че $DM=2MC$. Намерете дължините на страните, дължините на диагоналите и лицето на успоредника.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^{\ 2} = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^{\ 2} = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

28.08.2020 г. – Вариант 2

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	В	2
2	Г	2
3	Г	2
4	В	2
5	Б	2
6	Б	2
7	А	2
8	А	2
9	Б	2
10	А	2
11	Г	3
12	А	3
13	В	3
14	В	3
15	Б	3
16	Б	3
17	Б	3
18	Г	3
19	В	3
20	А	3
21	$\frac{\sqrt{65}}{13}=\frac{5}{\sqrt{65}}=\sqrt{\frac{5}{13}}$	4
22	30°	4
23	$a_1=184$	4
24	28 или 28%	4

25	-1	**4**
26	б) $A=-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$	**10**
27	а) $D_f: x\in(-\infty;\,-1]\cup[2;\,\infty)$ $D_g\ : x\in[3;\,\infty)$ б) 5	**10**
28	$AB=CD=9\,\text{cm};\ AD=BC=3\,\text{cm};$ $BD=3\sqrt{7}\ \text{cm};\ AC=3\sqrt{13}\ \text{cm};$ $S_{ABCD}=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$	**10**

Задача 26.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а)

$A=\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha=\sin^2\alpha\left(\sin\alpha\cos 3\alpha\right)+\cos^2\alpha\left(\cos\alpha\sin 3\alpha\right)=$ $=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}.\dfrac{1}{2}.\left[\sin 4\alpha+\sin(-2\alpha)\right]+\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}.\dfrac{1}{2}.\left[\sin 4\alpha+\sin 2\alpha\right]=$ $=\dfrac{1}{4}\left(\sin 4\alpha-\cancel{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}-\cancel{\sin 2\alpha}+\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\sin 4\alpha+\cancel{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}+\cancel{\sin 2\alpha}+\sin 2\alpha\cos 2\alpha\right)$ $=\dfrac{1}{4}\left(2\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\right)=\dfrac{1}{4}\left(2\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\right)=\dfrac{3}{4}\sin 4\alpha$	**6 т.**
б) От $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{8};\,\dfrac{3\pi}{8}\right)$ следва, че $4\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Тъй като $\mathrm{tg}4\alpha=2$, то $4\alpha\in\left(\pi;\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ и $\sin 4\alpha<0$ и $\cos 4\alpha<0$.	**1 т.**
От $\mathrm{tg}4\alpha=2$ следва, че $\sin 4\alpha=2\cos 4\alpha$. Следователно $\sin^2 4\alpha+\cos^2 4\alpha=1\Leftrightarrow 4\cos^2 4\alpha+\cos^2 4\alpha=1\overset{\cos 4\alpha<0}{\Longleftrightarrow}\cos 4\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ и $\sin 4\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.	**2 т.**
Следователно $A=\dfrac{3}{4}\sin 4\alpha=-\dfrac{3}{4}.\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.	**1 т.**

Задача 27.

Решение:

а) Дефиниционните множества D_f на $f(x)$ и D_g на $g(x)$ се определят по следния начин:

$D_f : (x-2)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ или $x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$

$D_g : x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3; \infty)$

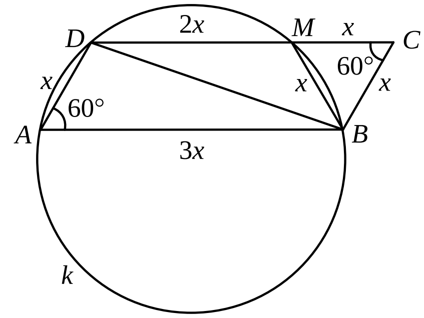
б) Дефиниционното множество на уравнението е сечението на D_f и D_g, т.е. *DM:* $x \in [3; \infty)$.

При $x \in [3; \infty)$ двете страни на уравнението $\sqrt{(x-2)(x+1)} = (x-2)\sqrt{x-3}$ приемат неотрицателни стойности и след повдигане в квадрат получаваме еквивалентното уравнение $(x-2)(x+1) = (x-2)^2(x-3) \Leftrightarrow (x-2)^2(x-3) - (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)(x-3) - (x+1)\right] = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 - 6x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5$,
като решение е само $x = 5$, тъй като $x_1 \notin DM$, $x_2 \notin DM$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Определяне на дефиниционните множества D_f : $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$ и D_g : $x \in [3; \infty)$	**1 т.** **1 т.**
б) *DM:* $x \in [3; \infty)$	**1 т.**
Повдигане в квадрат на $\sqrt{(x-2)(x+1)} = (x-2)\sqrt{x-3}$ и получаване на уравнението $(x-2)(x+1) = (x-2)^2(x-3)$	**1 т.**
Преобразуване до $(x-2)\left(x^2 - 6x + 5\right) = 0$	**2 т.**
Намиране на корените $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 5$	**2 т.**
Направен извод, че само $x = 5$ е корен	**2 т.**

Задача 28.



Решение: Означаваме $CM = x$.

Тогава $MD = 2x$ и $AB = 3x$.

Тъй като $\sphericalangle BMC = 180° - \sphericalangle DMB = \sphericalangle BAD = 60°$, то тогава $\triangle BMC$ е равностранен и $CM = BM = BC = AD = x$.

В $\triangle ABD$ от косинусовата теорема намираме $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60°$;

$BD^2 = 9x^2 + x^2 - 2.3x.x.\frac{1}{2} = 7x^2$ и $BD = x\sqrt{7}$, а от синусовата теорема получаваме $BD = 2R.\sin 60° = 2\sqrt{21}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{7}$ cm. Следователно $x = 3$, $AB = 3x = 9$ cm, $AD = 3$ cm, $BD = 3\sqrt{7}$ cm и $S_{ABCD} = AB.AD.\sin 60° = 9.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

Диагоналът AC намираме от равенството $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, $AC^2 = 2.81 + 2.9 - 63 = 9(18 + 2 - 7) = 9.13$ и $AC = 3\sqrt{13}$ cm.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Доказване, че $\triangle BMC$ е равностранен	**1 т.**
Доказване, че $AD = BM$	**1 т.**
Получаване на $BD = x\sqrt{7}$	**2 т.**
Намиране на $BD = 3\sqrt{7}$ cm	**1 т.**
Намиране на $AB = 9$ cm	**1 т.**
Намиране на $AD = 3$ cm	**1 т.**
Намиране на $S_{ABCD} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2	**1 т.**
Намиране на $AC = 3\sqrt{13}$ cm	**2 т.**