МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

21.05.2021 г. – Вариант 1

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Стойността на израза $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}$ **е:**

А) $\sqrt[6]{2}$ **Б)** $\sqrt[6]{4}$ **В)** $\sqrt[6]{8}$ **Г)** $\sqrt[6]{32}$

2. Стойността на израза $\sqrt{21^2-15^2}-\sqrt{150}+\sqrt{\left(\sqrt{6}-3\right)^2}$ **е:**

А) $3-4\sqrt{6}$ **Б)** $2\sqrt{6}-3$ **В)** 2 **Г)** 3

3. Множеството от НЕДОПУСТИМИТЕ стойности на израза $\dfrac{x-3}{x^2+9}-\dfrac{x-2}{x^2-4}$ **е:**

А) $\{-2;\ 2\}$ **Б)** $\{-2,\ 3\}$ **В)** $\{-3;\ 2;3\}$ **Г)** $\{-3;\ -2;\ 2;3\}$

4. Решенията на неравенството $(x-6)^2(x-1)(x+5)\le 0$ **са:**

А) $x\in[-5;1]\cup\{6\}$ **Б)** $x\in(-\infty;-5]\cup[1;6]$ **В)** $x\in(-\infty;-6]\cup[-1;5]$ **Г)** $x\in[-1;5]\cup\{6\}$

5. С колко процента трябва да се намали числото 72**, за да се получи числото** 63**?**

А) $\dfrac{1}{8}\%$ **Б)** 8% **В)** $12\dfrac{1}{2}\%$ **Г)** $13\dfrac{1}{2}\%$

6. Най-големият корен на уравнението $\left(x^2-4x\right)^2+7\left(x^2-4x\right)+12=0$ **е:**

А) -4 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

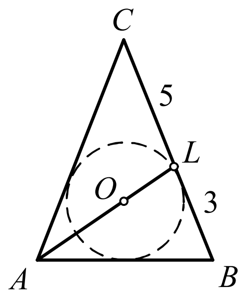
7. Ако x_1 **и** x_2 **са корените на уравнението** $6x^2-3x-1=0,$ **то НЕ е вярно, че:**

А) $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ **Б)** $x_1.x_2<0$ **В)** $x_1+x_2>0$ **Г)** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{6}$

8. Стойността на израза $\frac{\text{tg}405^\circ}{\sqrt{2}\,\text{tg}^2 765^\circ}$ **е:**

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Б)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **В)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **Г)** 1

9. В равнобедрен $\triangle ABC\left(AC=BC\right)$ **е вписана окръжност с център** *O***.**
Лъчът $AO^{\to}$ **пресича страната** BC **в точка** L**. Ако** $LB=3$ **cm и** $LC=5$ **cm, то периметърът на** $\triangle ABC$ **е:**



А) 20 **cm** **Б)** 20,8 **cm** **В)** 21,4 **cm** **Г)** $\frac{88}{3}$ **cm**

10. В $\triangle ABC$ $AB=8$ **cm**, $BC=5$ **cm и** $AC=10$ **cm. Ако точка** *M* **е средата на страната** *AB*, **а точката** *N* **от страната** *AC* **е такава, че** $\sphericalangle AMN=\sphericalangle ACB$**, то намерете дължината на** *MN*.

А) 2 **cm** **Б)** 2,5 **cm** **В)** 3,2 **cm** **Г)** 4 **cm**

11. Графиката на коя от дадените функции има само една обща точка с абсцисната ос?

А) $f(x)=x^2+25x+25$ **Б)** $f(x)=x^2+5x+25$

В) $f(x)=x^2-10x-25$ **Г)** $f(x)=x^2-10x+25$

12. Коя от редиците НЕ е монотонна?

А) $-2;-4;-6;-8$ **Б)** $-\frac{1}{3};-\frac{1}{9};-\frac{1}{27};-\frac{1}{81}$ **В)** $-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4}$ **Г)** $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$

13. Сумата на първите шест члена на геометрична прогресия, за която $a_1=6$ **и** $q=\frac{1}{2}$, **е равна на:**

А) $\frac{198}{16}$ **Б)** $\frac{189}{16}$ **В)** $\frac{179}{16}$ **Г)** $\frac{21}{2}$

14. Колко е $\cos\alpha$**, ако** $\text{cotg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=2$ **и** $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$**?**

А) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ **Б)** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ **В)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **Г)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$

15. С помощта на цифрите 2, 3, 4 **и** 5 **са образувани всички възможни трицифрени числа с различни цифри. Броят на тези от тях, които НЕ се делят на 9, е:**

А) 6 **Б)** 12 **В)** 18 **Г)** 24

16. За статистическия ред 0, 1, a, 2, b, 5, 9, 11 **модата е** 1, **а медианата е** 2,5. **Средноаритметичното на реда е равно на:**

А) 3 **Б)** 4 **В)** 6,5 **Г)** 7

17. В остроъгълен $\triangle ABC$ **страната** $AB = 2\sqrt{3}$ **cm, а радиусът на описаната около него окръжност е** $R = 2\sqrt{3}$ **cm. Градусната мярка на** $\sphericalangle ACB$ **е равна на:**

А) 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** 150°

18. В правоъгълния $\Delta ABC\left(\sphericalangle C = 90^\circ\right)$ **височината** CH $\left(H \in AB\right)$ **разделя** AB **на отсечки** AH **и** BH, **като** $BH = 9.AH$ **. Ако** $CH = 3\sqrt{5}$ **cm, то лицето на** ΔABC **е равно на:**

А) 25 **cm²** **Б)** 75 **cm²** **В)** 135 **cm²** **Г)** 150 **cm²**

19. Дължините на страните на успоредник се отнасят както 3:2, **а диагоналите му могат да са катети на правоъгълен триъгълник с хипотенуза с дължина** $13\sqrt{2}$ **cm. Периметърът на успоредника е:**

А) $5\sqrt{13}$ **cm** **Б)** $10\sqrt{13}$ **cm** **В)** 40 **cm** **Г)** $10\sqrt{26}$ **cm**

20. Бедрото на равнобедрен трапец е 2 **cm, малката основа е** $\sqrt{2}$ **cm, а ъгълът при нея е** 135° **. Лицето на трапеца е равно на:**

А) 3 **cm²** **Б)** 4 **cm²** **В)** 6 **cm²** **Г)** 8 **cm²**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c{}^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

21.05.2021 г. - Вариант 1

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Пресметнете стойността на израза $A=\sqrt{3B+2C}$**, където** $B=\log_2\left(\log_3 81\right)$**, а** $C=\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\log_{16}\frac{1}{2}}$.

22. Намерете множеството от решенията на неравенството $x^2+2x\le\dfrac{9}{x^2+2x}$**.**

23. Дадена е аритметична прогресия с n **члена, за която** $a_1=1, a_3=13$ **и** $S_n=280.$ **Намерете броя** n **на членовете.**

24. В купа има 4 **червени и** 7 **черни топки. Намерете вероятността при едновременно изваждане на три топки поне една от тях да е червена топка.**

25. В $\triangle ABC$ **страните** AB, BC **и** AC **са с дължини съответно** $2\sqrt{2}$ **cm,** $\sqrt{5}$ **cm и** 1 **cm. Ако** CC_1 **е височината през върха** C**, намерете радиуса на вписаната в** $\triangle ACC_1$ **окръжност.**

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{x-2}{2\left(\sqrt{x-1}-1\right)}+\sqrt{x-1}$**. Намерете:**

а) дефиниционното ѝ множество;

б) стойностите на x**, за които** $f(x)=1$**.**

27. Дадени са изразите $A=\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ **и** $B=2\cos\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$**. За допустимите стойности на** α **докажете, че:**

а) $A=B$**;**

б) $B=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$**, ако** $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{7}$ **и** $\alpha\in\left(0°;\,180°\right)$**.**

28. В окръжност k **с център** O **е вписан** $\triangle ABD$**. Допирателната към окръжността** k **в точка** D **пресича правата** AB **в точка** M **(**A **е между** B **и** M**), като** $MA=2$ **cm,** $AB=6$ **cm и** $\sphericalangle AMD=60°$.

а) Пресметнете дължината на MD **и докажете, че** $AD\perp MB$ **и** $O\in BD$**.**

б) Ако C **е средата на дъгата** $\overset{\frown}{BD}$**, несъдържаща точката** A**, докажете, че дължината на** $MC=2\sqrt{10+4\sqrt{3}}$ **cm.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad$ $D=b^2-4ac$ $\quad$ $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad$ $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\quad$ $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad$ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad$ $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\quad$ $a^{\log_a b}=b$ $\quad$ $\log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad$ $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\quad$ $S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

21.05.2021 г. - Вариант 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1	А	2
2	Г	2
3	А	2
4	А	2
5	В	2
6	В	2
7	Г	2
8	А	2
9	Б	2
10	А	2
11	Г	3
12	В	3
13	Б	3
14	Б	3
15	В	3
16	Б	3
17	А	3
18	Б	3
19	Б	3
20	Б	3
21	$A=2\sqrt{3}$	4
22	$x\in\left[-3;-2\right)\cup\left(0;1\right]$	4
23	10	4

24	$\frac{26}{33}$	**4**
25	$r=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **cm**	**4**
26	а) $x\in\left[1;2\right)\cup\left(2;\infty\right)$ б) $x=\frac{10}{9}$	**10**
27		**10**
28	а) $MD=4$ **cm**	**10**

Задача 26.

Решение: а) Дефиниционното множество DM на функцията се определя от решенията на системата $\left|\begin{array}{l}x-1\geq 0\\ \sqrt{x-1}\neq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x\geq 1\\ x\neq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow DM: x\in\left[1;2\right)\cup\left(2;\infty\right)$.

б) При $x\in DM: f\left(x\right)=1\Leftrightarrow\frac{x-2}{2\left(\sqrt{x-1}-1\right)}+\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x-2+2\left(x-1\right)-2\sqrt{x-1}=2\sqrt{x-1}-2\;\Leftrightarrow\; 4\sqrt{x-1}=3x-2$.

Повдигаме в квадрат и решаваме уравнението $16\left(x-1\right)=\left(3x-2\right)^2\Leftrightarrow$ $16x-16=9x^2-12x+4\Leftrightarrow 9x^2-28x+20=0, x_1=2\notin DM, x_2=\frac{10}{9}\in DM$.

С проверка $\left(4\sqrt{\frac{10}{9}-1}=3.\frac{10}{9}-2\Leftrightarrow 4.\frac{1}{3}=\frac{10}{3}-2\right)$ или с еквивалентност $\left(3x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{2}{3}\right)$ установяваме, че $x=\frac{10}{9}$ е решение. Следователно уравнението има единствен корен $x=\frac{10}{9}$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Определяне на $x\geq 1, x\neq 2$ или $x\in\left[1;2\right)\cup\left(2;\infty\right)$	**2 точки**
б) Преобразуване на уравнението до вида $4\sqrt{x-1}=3x-2$	**2 точки**
Получаване на уравнението $9x^2-28x+20=0$	**2 точки**
Намиране на корените $x_1=2$ и $x_2=\frac{10}{9}$	**2 точки**
Установяване, че $x=2$ не е решение	**1 точка**

Установяване, че $x=\dfrac{10}{9}$ е решение (с проверка или с еквивалентност)	**1 точка**

Задача 27.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:
а)

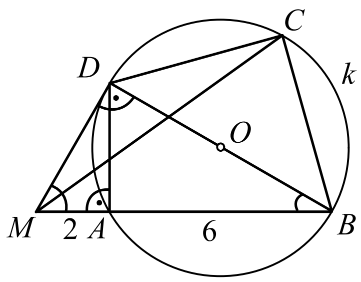
$A=\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=$	**1 точка**
$=\dfrac{2\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left[\sin\left(90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right]=$	**1 точка**
$=2\sqrt{2}\sin\dfrac{90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha}{2}}{2}\cos\dfrac{90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\alpha}{2}}{2}=2\sqrt{2}\sin 45^\circ\cos\left(\dfrac{90^\circ-\alpha}{2}\right)=$	**1 точка**
$=2\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ и следователно $A=B$	**1 точка**

б)

От $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{7}$ и основното тригонометрично тъждество получаваме $\left\lvert\begin{array}{l}\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\sqrt{7}\\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1\end{array}\right.$ получаваме $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{\alpha}{2}\in(0^\circ;\,90^\circ)\Rightarrow\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ и $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$	**2 точки**
Тогава $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\dfrac{\sqrt{14}}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ и $\cos\alpha=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{16}-\dfrac{14}{16}=-\dfrac{3}{4}$.	**2 точки**
Следователно $B=2\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}-\dfrac{3}{4}}{\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$	**2 точки**

Задача 28.

Решение: а) От равенството $MD^2 = MA.MB \Leftrightarrow MD^2 = 2.8$ намираме $MD = 4$ cm.



Ще докажем, че $\sphericalangle MAD = 90°$, от което ще следва, че $AD \perp MB$.

От косинусовата теорема в $\triangle MAD$ намираме

$$AD^2 = MA^2 + MD^2 - 2.MA.MD.\cos 60° = 4 + 16 - 2.2.4.\frac{1}{2} = 12 .$$

От $MA^2 + AD^2 = 4 + 12 = 16 = MD^2$ следва, че $\triangle MAD$ е правоъгълен с $\sphericalangle MAD = 90°$.

От $AD \perp MB$ следва, че $\sphericalangle BAD = 90°$. Но той е вписан в *k*, *BD* е диаметър на *k* и $O \in BD$.

б) Тъй като *MD* е допирателна на *k*, то $MD \perp DO$, $\triangle MDB$ е правоъгълен, $\sphericalangle BMD = 60°$ и

$$BD = MB.\sin 60° = 8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$

По условие $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$. Тогава $BC = CD$, $\triangle BCD$ е равнобедрен и правоъгълен (*BD* е диаметър на *k*), $\sphericalangle CBD = 45°$ и $BC = BD.\sin 45° = 4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$ cm.

В $\triangle MDC$ $\sphericalangle MDC = \sphericalangle MDB + \sphericalangle CDB = 90° + 45° = 135°$.

От косинусовата теорема в $\triangle MDC$ намираме: $MC^2 = MD^2 + DC^2 - 2MD.DC.\cos 135° =$

$$= 16 + 24 + 2.4.2\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 40 + 8.2\sqrt{3} = 40 + 16\sqrt{3} = 4\left(10 + 4\sqrt{3}\right) \text{ и } MC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{3}} \text{ cm}.$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране на $MD = 4$ cm	**1 точка**
Доказване , че $AD \perp MB$ и $O \in BD$	**3 точки и 1 точка**
б) Пресмятане на $BC = 2\sqrt{6}$ cm	**2 точки**
Пресмятане на $MC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{3}}$ cm	**3 точки**