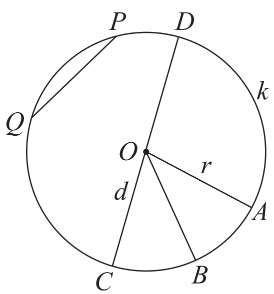
ОКРЪЖНОСТ. ДЪЛЖИНА НА ОКРЪЖНОСТ. КРЪГ. ЛИЦЕ НА КРЪГ



Геометрична фигура, образувана от всички точки в равнината, които са на едно и също разстояние от избрана точка O, наричаме **окръжност**.

Точката O наричаме **център на окръжността**.

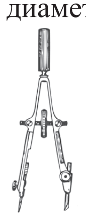
Разстоянието AO от центъра O до точка A от окръжността наричаме **радиус** и го означаваме с $\boldsymbol{r}$, т.е. $OA = OB = OC = OD = r$.

Окръжността означаваме с $k\ (O;\ r)$.

Отсечка, която съединява две точки от окръжността, наричаме **хорда**. Например PQ е хорда.

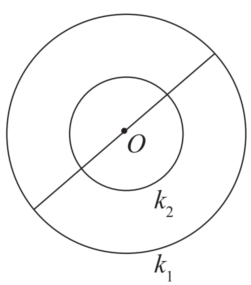
Диаметър наричаме хорда, която минава през центъра на окръжността. Означаваме го с $\boldsymbol{d}$. Например CD е диаметър и има дължина $d = 2\ .\ r$.

Окръжност чертаем с **пергел**:



(1) Начертайте окръжност с център дадена точка O и с радиус $r = 3$ cm. Колко такива окръжности може да начертаете?

Една окръжност е определена, ако знаем центъра и радиуса ѝ.



(2) Намерете радиусите на двете окръжности с общ център точка O, ако диаметърът на голямата окръжност k_1 е разделен от малката окръжност k_2 на три части, равни на 7 cm, 10 cm и 7 cm.

Забелязваме, че дължината $\boldsymbol{C}$ на окръжността зависи от нейния радиус. Установено е, че частното между дължината на окръжност $\boldsymbol{C}$ и нейния диаметър $\boldsymbol{d}$ е едно и също число за всички окръжности. Това число е означено с π (пи) и е безкрайна непериодична десетична дроб.

Тъй като $\pi = \dfrac{C}{d} = \dfrac{C}{2r}$, то $\boldsymbol{C = \pi\ .\ d = 2\ .\ \pi\ .\ r}$.

Древните вавилонци са смятали, че частното от дължината на всяка окръжност и нейния диаметър е числото 3. Египтяните са използвали 3,16. Архимед (287 – 212 г. пр. Хр.) е определил π с точност до третия знак след десетичната запетая. Рудолф ван Цойлен (1540 – 1510) първи е използвал означението π.

Днес с помощта на компютри можем да изчислим числото π с хиляди знаци след десетичната запетая – $\pi = 3{,}14159265\ldots$.

Добри рационални приближения за π са $\dfrac{22}{7}$ и 3,14.

Диаметърът CD разделя окръжността на две равни части – полуокръжности, всяка от които има дължина половината от C.

(3) Намерете дължината на окръжност, ако:
а) радиусът ѝ е 10 cm (нека $\pi \approx 3{,}14$);
б) диаметърът ѝ е 35 mm (нека $\pi \approx \dfrac{22}{7}$);
в) радиусът ѝ е 5 dm (нека $\pi \approx 3{,}14$).

Решение: а) $C = 2\ .\ \pi\ .\ r = 2\ .\ 3{,}14\ .\ 10 = 62{,}8$ cm;
б) $C = \pi\ .\ d = \dfrac{22}{7}\ .\ 35 = 22\ .\ 5 = 110$ mm $= 11$ cm;
в) $C = 2\ .\ \pi\ .\ r = 2\ .\ 3{,}14\ .\ 5 = 3{,}14\ .\ 10 = 31{,}4$ dm.

(4) Ако дължината на окръжност е 47,1 dm, намерете радиуса ѝ в сантиметри.

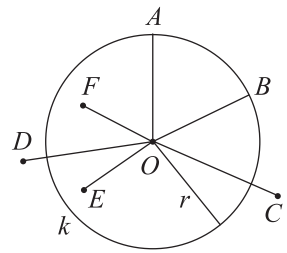
(5) Колко метра е изминало колело с диаметър 2,5 dm, ако е направило 1000 завъртания (нека $\pi \approx 3{,}14$)?

Решение: Пътят, който изминава колелото за едно завъртане, е равен на обиколката му. Тя е $C = 2\ .\ \pi\ .\ r = 2\ .\ 3{,}14\ .\ 2{,}5 = 5\ .\ 3{,}14 = 15{,}7$ dm $= 1{,}57$ m. Следователно за 1000 завъртания колелото е изминало $1{,}57\ .\ 1000 = 1570$ m.

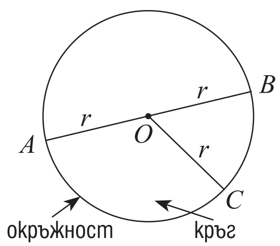
(6) Автомобилно колело е изминало 1 km и 884 m. Колко завъртания е направило колелото, ако радиусът му е 30 cm?

(7) Цирков артист обикаля кръгла арена с радиус 3,5 m с колело с диаметър 1 m. Колко пъти ще се завърти колелото за една обиколка на арената? Пресметнете, ако $\pi \approx 3{,}14$.

(8) Начертана е окръжност k с център O и радиус r. Отбелязани са точките A, B, C, D, E и F. Сравнете разстоянията от тези точки до центъра на окръжността с радиуса на окръжността. Определете как са разположени тези точки спрямо окръжността.



Решение: Тъй като $OA = OB = r$, то A и B са точки от окръжността k. Тъй като $OE < r$ и $OF < r$, то E и F са вътрешни точки за окръжността k. Тъй като $OC > r$ и $OD > r$, то C и D са външни точки за окръжността k.



Геометрична фигура, образувана от окръжност и вътрешните точки за окръжността, наричаме **кръг**.

Елементи на кръга

Центъра O на окръжността наричаме **център на кръга**.

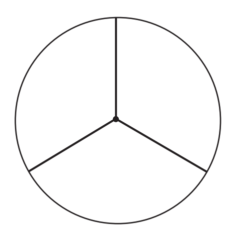
Радиуса r на окръжността наричаме **радиус на кръга**.

Диаметъра d на окръжността наричаме **диаметър на кръга**.

Ъгъла с връх центъра на окръжността и рамене, които пресичат окръжността, наричаме **централен ъгъл**. Например $\sphericalangle AOC$ е централен ъгъл.

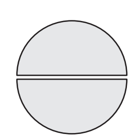
Едно пълно завъртане по окръжността е $360°$.

(9) Намерете големината на централните ъгли на чертежа, ако те са равни.

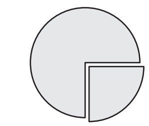


Решение: Ако x е големината на всеки от тези ъгли, тогава $3 \,.\, x = 360°$ и $x = 360° : 3 = 120°$.

Полукръг: Един диаметър разделя кръга на два полукръга.



Сектор: Два радиуса разделят кръга на два сектора.



Лицето на кръг намираме по формулата $S = \pi \,.\, r^2$.

(10) Намерете лицето на кръг с:

а) радиус 8 cm ($\pi \approx 3,14$);

б) диаметър 20 dm ($\pi \approx 3,14$).

Решение:

а) $S = \pi \,.\, r^2 = 3,14 \,.\, 8^2 = 3,14 \,.\, 64 = 200,96\ \text{cm}^2$;

б) $r = d : 2 = 20 : 2 = 10\ \text{dm}$, $S = \pi \,.\, r^2 = 3,14 \,.\, 10^2 = 3,14 \,.\, 100 = 314\ \text{dm}^2$.

(11) Лицето на кръг е 154 cm^2. Намерете радиуса на кръга ($\pi \approx \frac{22}{7}$).

Решение:

$S = \pi \,.\, r^2$, т.е. $154 = \frac{22}{7} \,.\, r^2$

$r^2 = 154 : \frac{22}{7}$, т.е. $r^2 = 154 \,.\, \frac{7}{22}$

$r^2 = 7 \,.\, 7$, $r = 7$ cm

(12) Лицето на кръг е $81\pi\ \text{cm}^2$. Намерете:

а) радиуса на кръга;

б) диаметъра на кръга.

(13) Каква площ полива водна машина, ако разпръсква водата до 5 m от мястото, където е поставена?

(14) Кръгла маса е с диаметър 1,5 m. Колко квадратни метра трябва да е покривката така, че масата да е покрита и покривката да виси по 25 cm от всички страни?

(15) Дължината на окръжността, която огражда циркова арена, е 94,2 m. Намерете площта на арената.

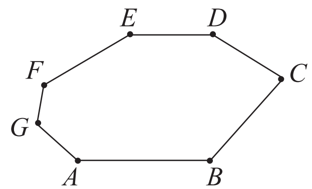
(16) Пресметнете с калкулатор обиколката и лицето на диска на:

а) Луната, чийто диаметър е 3476 km;

б) Слънцето, чийто диаметър е $1,392 \,.\, 10^6$ km;

в) Земята, чийто радиус е 6370 km.

МНОГОЪГЪЛНИК. ПРАВИЛЕН МНОГОЪГЪЛНИК. ЛИЦЕ НА МНОГОЪГЪЛНИК

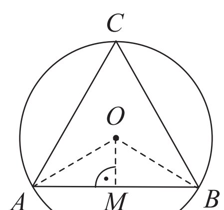


Равнинни фигури, които имат повече от 4 ъгъла (т.е. повече от 4 страни), наричаме **многоъгълници**.

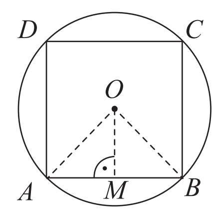
Например седмоъгълникът $ABCDEFG$ е **многоъгълник**.

Елементи на многоъгълника *ABCDEFG*:
върхове – A, B, C, D, E, F и G;
страни – AB, BC, CD, DE, EF, FG и GA;
ъгли – $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle FGA$, $\sphericalangle GAB$;
обиколка – $P = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA$.

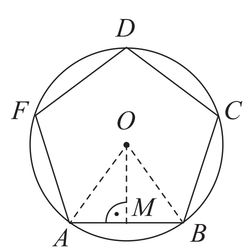
Многоъгълник, на който всички страни са равни и всички ъгли са равни, наричаме **правилен многоъгълник**.



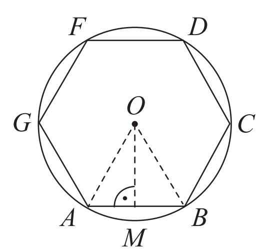
равностранен (правилен) триъгълник



квадрат (правилен четириъгълник)



правилен петоъгълник



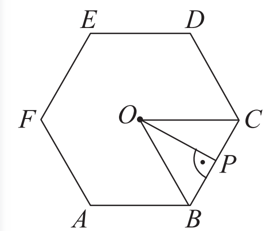
правилен шестоъгълник

Построяване на правилен многоъгълник

- Чертаем окръжност и централен ъгъл $\sphericalangle AOB$ с мярка толкова градуса, колкото е частното на **360** с броя ***n*** на страните на многоъгълника.
- С пергел, чийто разтвор е равен на дължината на отсечката (хордата) AB, разделяме окръжността на ***n*** равни части.
- Съединяваме последователно получените точки.

(1) Начертайте правилен шестоъгълник.

Елементи на правилен многоъгълник



Върховете на всеки правилен многоъгълник са точки от една окръжност и я разделят на равни части (дъги).

Центъра ***O*** на окръжността наричаме още и **център на правилния многоъгълник**.

Разстоянието (перпендикуляра) ***OP*** от центъра към някоя от страните наричаме **апотема** на правилния многоъгълник.

Прието е да означаваме апотемата с буквата ***a***, а страната на правилния многоъгълник – с ***b***.

Обиколката на правилния многоъгълник е $\boldsymbol{P = b + b + b + \ldots + b = n\,.\,b}$, т.е. $\boldsymbol{P = n\,.\,b}$, където естественото число ***n*** е броят на страните, а ***b*** е дължината на страната на правилния многоъгълник.

(2) Обиколката на правилен многоъгълник е 60 cm. Определете броя на страните му, ако страната му е 5 cm.

Решение: $P = n\,.\,b$, т.е. $60 = n\,.\,5$, $n = 60 : 5$, $n = 12$ страни.

(3) Намерете обиколката на правилен многоъгълник със страна $b = 14{,}2$ cm, ако броят на страните му е:
а) 5; б) 6; в) 8; г) 10; д) 15.

Решение: а) $P = n\,.\,b$, т.е. $P = 5\,.\,14{,}2 = 71$ cm;
б) $P = 6\,.\,14{,}2 = 85{,}2$ cm.

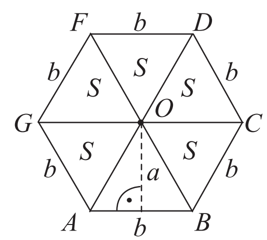
④ Сравнете обиколките на правилен триъгълник със страна 5 cm и правилен петоъгълник със страна 25 mm.

Решение: а) За триъгълника $P = n \,.\, b$, т.е. $P = 3 \,.\, 5 = 15$ cm.
За петоъгълника $b = 25$ mm $= 2{,}5$ cm и тогава $P = 5 \,.\, 2{,}5 = 12{,}5$ cm.
Обиколката на триъгълника е по-голяма от тази на петоъгълника.

Лице на многоъгълник

Всеки правилен многоъгълник е съставен от ***n*** еднакви триъгълника с лице ***S***. Тогава лицето ***B*** на правилния многоъгълник е

$$\boldsymbol{B = n \,.\, S = n \,.\, \frac{a \,.\, b}{2}}, \text{ или } \boldsymbol{B = \frac{P \,.\, a}{2}}.$$



правилен шестоъгълник

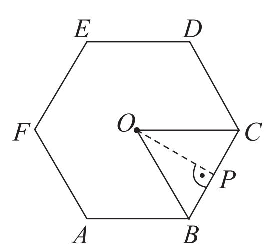
⑤ Намерете лицето на правилен десетоъгълник *ABCDEFGHIJ*, ако има страна $b = 3{,}2$ dm и апотема $a = 4{,}93$ dm.

Решение: $B = \dfrac{P \,.\, a}{2}$, т.е. $B = \dfrac{10 \,.\, 3{,}2 \,.\, 4{,}93}{2} = 78{,}88$ dm^2

⑥ Даден е правилен многоъгълник с център O и лице 180 cm^2. Намерете броя на страните му, ако $S_{A0B} = 15$ cm^2.

Решение: От $B = n \,.\, S_{A0B}$, където $S_{A0B} = 15$ cm^2, получаваме
$180 = n \,.\, 15$, т.е. $n = 180 : 15$, $n = 12$.

⑦ Намерете апотемата OP на правилния шестоъгълник *ABCDEF,* ако лицето му е 93,6 cm^2, а страната му е 0,6 dm.

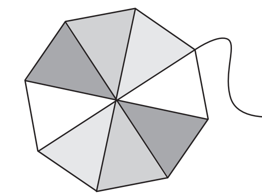


Решение: $B = \dfrac{P \,.\, a}{2}$, $b = 0{,}6$ dm $= 0{,}6 \,.\, 10 = 6$ cm,
$P = n \,.\, b = 6 \,.\, 6 = 36$ cm, $93{,}6 = \dfrac{36 \,.\, a}{2}$, $18 \,.\, a = 93{,}6$. Получаваме $a = 93{,}6 : 18$, т.е. $a = 5{,}2$ cm.

⑧ Намерете:
а) апотемата на правилен осмоъгълник *ABCDEFGH* с център O, страна $b = 6$ cm и $S_{OAB} = 43{,}5$cm^2;
б) страната на правилен десетоъгълник *ABCDEFGHIJ* с център O, апотема $a = 15{,}4$ cm и $S_{ABCDEFGHIJ} = 770$ cm^2.

⑨ Даден е правилен осмоъгълник със страна 100 cm и лице 480 dm^2. Намерете апотемата на осмоъгълника.

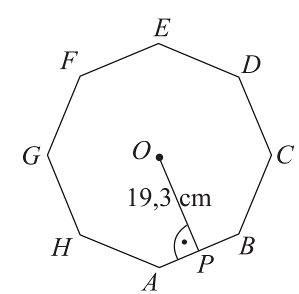
⑩ Каква фигура е хвърчилото на чертежа? Колко квадратни метра хартия ще са необходими за направата му, ако страната му е 6 dm, а апотемата му е 72,2 cm? Предвидете за изрезки още 10% от лицето на хвърчилото.



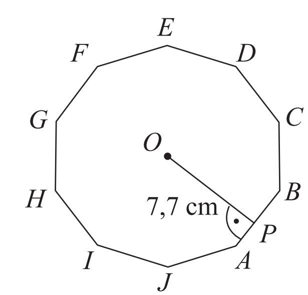
⑪ Лицето на правилен петоъгълник е 690 cm^2. Намерете апотемата му, ако страната му е 20 cm.

⑫ По дадените елементи намерете лицата на правилните многоъгълници.

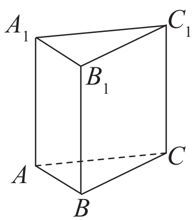
а)



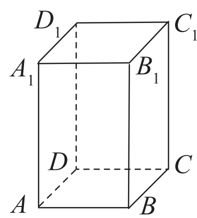
б)



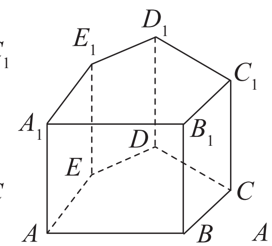
ПРИЗМА. ПРАВИЛНА ПРИЗМА. ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА И ОБЕМ НА ПРАВА ПРИЗМА



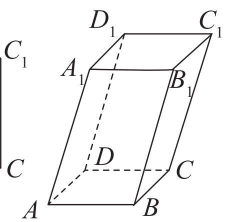
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Геометричните тела от горните чертежи наричаме **призми**. Телата от фигури 1, 2 и 3 наричаме **прави призми**.

Всяка права призма има (например при фиг. 1):
- **две основи** – ΔABC – долна основа, и $\Delta A_1B_1C_1$ – горна основа;
- **основни ръбове** – AB, BC, CA, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1;
- **околни ръбове** – AA_1, BB_1, CC_1;
- **околни стени** – правоъгълниците ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1.

Всички околни стени на правите призми са правоъгълници, от което следва:
- Всички околни ръбове са равни: $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
- Околните ръбове са равни на височината на призмата. Височината означаваме с h, т.е. $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$.
- Основните ръбове на долната и горната основа са равни по двойки, т.е. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Ако основите на правата призма са триъгълници, наричаме призмата **триъгълна**.

Ако основите на правата призма са четириъгълници, наричаме призмата **четириъгълна**.

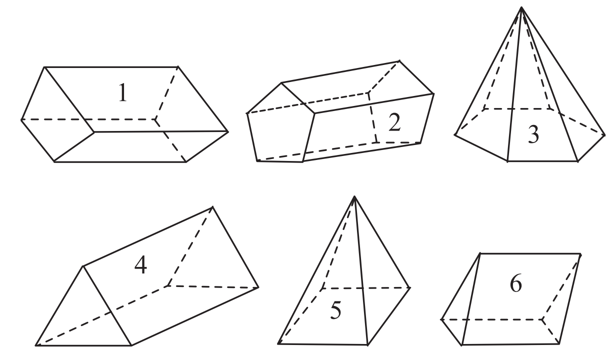
Ако основите на правата призма са петоъгълници, наричаме призмата **петоъгълна**, и т.н.

Призмата от фиг. 4 наричаме **наклонена призма**.

Двете основи са еднакви многоъгълници и имат равни лица.

(1) Права призма ли е правоъгълният паралелепипед?

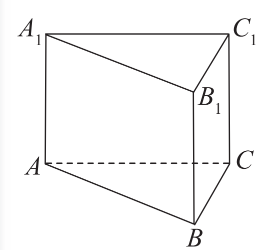
(2) Кои от начертаните тела са прави призми?



(3) Сборът от всички ръбове на права петоъгълна призма е 30 dm. Ако обиколката на долната ѝ основа е 7,5 dm, намерете дължината на околния ѝ ръб.

(4) Определете вида на основата на права призма, ако броят на околните и основните ѝ ръбове е:

а) 9; б) 12; в) 15.



Ако основите на права призма са правилни многоъгълници, наричаме призмата правилна.

Следователно в правилната призма страните и ъглите на горната и долната основа са равни.

Основните ръбове на правилната призма означаваме с $\boldsymbol{b}$.

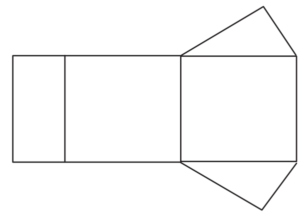
(5) Съществува ли правилна призма с основа:

а) правоъгълен триъгълник; б) правилен петоъгълник?

(6) Намерете височината на правилна триъгълна призма, ако обиколката на основата ѝ е 10,8 cm, а лицето на една нейна околна стена е 1296 mm^2. Определете вида на околните стени на призмата.

(7) От тел е направен макет на правилна триъгълна призма с основен ръб 12 cm и височина 20 cm. Колко дециметра тел са използвани?

Развивка на права призма



Ако разрежем призмата по някои ръбове и я разгънем, ще получим начертаната фигура, която наричаме **развивка на призмата**.

Развивката на призма се състои от толкова правоъгълника, колкото са околните ѝ стени, и от два многоъгълника – основите на призмата.

Околните стени на призмата образуват **околната ѝ повърхнина**, а околните стени и основите – **повърхнината на призмата**.

Лице на повърхнина на права призма

Лицето на повърхнината на права призма намираме по формулите:

околна повърхнина – $\boldsymbol{S = P\,.\,h}$,

пълна повърхнина – $\boldsymbol{S_1 = S + 2\,.\,B}$,

където $\boldsymbol{P}$ е обиколката на основата, а $\boldsymbol{h}$ е височината на правата призма (околният ръб е $\boldsymbol{l}$); $\boldsymbol{B}$ е лицето на основата.

Двете основи на призмата са еднакви многоъгълници и са с равни лица.

(8) Дадена е правилна четириъгълна призма с основен ръб 7 cm и височина 1,6 dm. Намерете лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на призмата.

(9) Намерете лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на правилна петоъгълна призма с основен ръб 5 cm, височина 0,6 dm и апо-тема на основата a = 3,45 cm. Запишете получените лица в квадратни сантиметри.

(10) Намерете лицето на околната повърхнина на права призма с височина 10 cm и запишете получения резултат в квадратни сантиметри, ако основата ѝ е:

а) равностранен триъгълник със страна 3,2 cm;
б) равнобедрен триъгълник с основа 4 cm и бедро 5,2 cm;
в) правоъгълник с измерения 4,2 cm и 0,58 dm;
г) ромб със страна 4,5 cm;
д) равнобедрен трапец с основи 13 cm и 0,7 dm и бедро 50 mm.

(11) Намерете основния ръб на правилна четириъгълна призма, ако лицето на околната ѝ повърхнина е 144 cm^2, а височината ѝ е 5 cm.

(12) Намерете височината на права призма с лице на околната повърхнина 3484 cm^2 и обиколка на основата 174,2 cm.

Обем на права призма

Обем на права призма намираме по формулата $\boldsymbol{V = B\,.\,h}$, където $\boldsymbol{B}$ е лицето на основата, а $\boldsymbol{h}$ е височината на правата призма (околният ръб е $\boldsymbol{l}$).

(13) Намерете обема на права четириъгълна призма, ако основата ѝ е успоредник със страна a = 5 cm и височина към нея h_a = 3 cm, а височината на призмата е h = 8 cm.

(14) Намерете обема на правилна петоъгълна призма с височина 5 dm, основен ръб b = 20 cm и апотема на основата a = 138 mm.

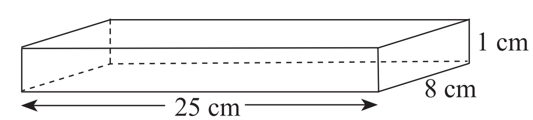
(15) Намерете обема на молив с форма на правилна шестоъгълна призма с основен ръб 4 mm, апотема на основата a = 0,35 cm и дължина 17 cm.

(16) Намерете височината на правилна шестоъгълна призма, ако обемът ѝ е 1404 cm^3, а лицето на основата ѝ е 93,6 cm^2.

(17) Мраморна колона има форма на правилна петоъгълна призма с височина 3 m, основен ръб 30 cm и апотема на основата 20,7 cm. Колко кубически метра мрамор са използвани за колоната?

(18) Ваза има форма на права триъгълна призма. Вътрешните размери на основата са a = 10 cm и h_a =12 cm. Колко литра вода трябва да налеем във вазата, за да напълним $\frac{2}{3}$ от нея, ако височината ѝ е 30 cm?

(19) Стоманен детайл има посочените форма и размери. Намерете масата на детайла, ако 1 cm^3 стомана тежи 7,8 g.

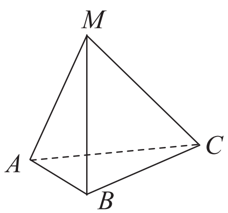


(20) Стоманен детайл има форма на четириъгълна призма с основа трапец с лице 7,2 cm^2, а височината ѝ е 5 cm. Намерете масата на детайла, ако 1 cm^3 стомана тежи 7,8 g.

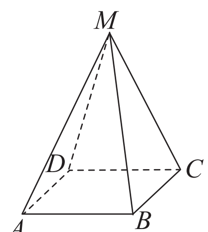
(21) Сравнете обема и лицето на околната повърхнина на правилна четириъгълна призма с височина 0,5 dm, ако основният ѝ ръб е 4 cm.

ПИРАМИДА. ПРАВИЛНА ПИРАМИДА. ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА ПРАВИЛНА ПИРАМИДА. ОБЕМ НА ПИРАМИДА

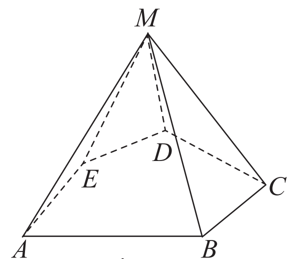
Начертаните тела наричаме **пирамиди**.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Пирамиди наричаме телата, на които едната от стените е многоъгълник, а останалите стени са триъгълници с общ връх.

Пирамидата е ръбесто тяло (многостен).

Многоъгълника наричаме **основа на пирамидата**.

Основите на пирамидите на фиг. 1, 2 и 3 са съответно триъгълник, четириъгълник и петоъгълник.

Стените, които са триъгълници с общ връх, наричаме **околни стени на пирамидата**.

На фиг. 1 това са триъгълниците ABM, BCM и ACM.

Общия връх на околните стени наричаме **връх на пирамидата**.

На фиг. 1 точка M е връх на пирамидата.

Страните на основата наричаме **основни ръбове**, а останалите страни – **околни ръбове**.

На фиг. 1 AB, BC и CA са **основни**, а MA, MB и MC са **околни** ръбове.

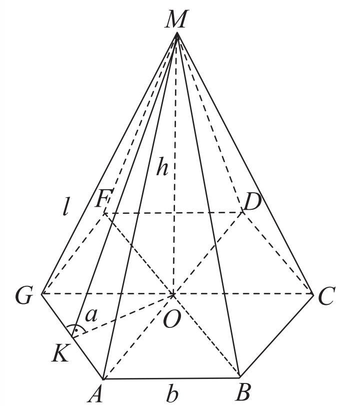
Според **основите** пирамидите са **триъгълна** (фиг. 1), **четириъгълна** (фиг. 2), **петоъгълна** (фиг. 3) и т.н.

1 Може ли броят на ръбовете на пирамида да е нечетно число?

2 Определете вида на пирамидата, ако:
а) върховете ѝ са 11; б) околните ѝ стени са 8;
в) всичките ѝ стени са 7.

Правилна пирамида е пирамида, чиято основа е правилен многоъгълник и околните ѝ ръбове са равни.

На чертежа е представена правилна шестоъгълна пирамида $ABCDFGM$.



Точка $\boldsymbol{O}$ **е център на правилния многоъгълник** $\boldsymbol{ABCDFG}$.

Основния ръб означаваме с $\boldsymbol{b}$, а апотемата на основата – с $\boldsymbol{a}$, т.е.
$AB = BC = CD = DF = FG = GA = \boldsymbol{b}$; $OK = \boldsymbol{a}$.

Околните ръбове означаваме с $\boldsymbol{l}$, т.е.
$MA = MB = MC = MD = MF = MG = \boldsymbol{l}$.

Всички околни стени на правилната пирамида са равнобедрени триъгълници с основа $\boldsymbol{b}$ и бедро $\boldsymbol{l}$. Лицата и височините им към основата са равни.

Всяка от тези височини наричаме **апотема на пирамидата** и я означаваме с $\boldsymbol{k}$. Например $MK = \boldsymbol{k}$.

Отсечката MO наричаме **височина на пирамидата**. Означаваме я с $\boldsymbol{h}$.

3 Намерете апотемата на правилна триъгълна пирамида, ако обиколката на основата ѝ е 20,7 cm, а лицето на една от околните ѝ стени е 13,8 cm^2.

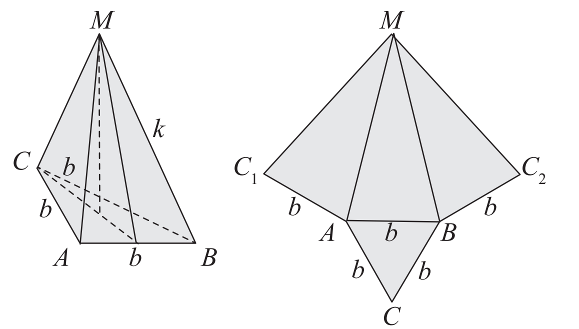
4 Лицето на околна стена на правилна шестоъгълна пирамида е 0,12 dm^2. Намерете апотемата на пирамидата, ако обиколката на основата ѝ е 36 cm.

Лице на повърхнина на правилна пирамида

Околните стени на една пирамида образуват **околната ѝ повърхнина**.

Сбора от лицата на околните стени наричаме **лице на околната повърхнина** на пирамидата. Означаваме я с ***S***.

На чертежа е представена развивка на правилна триъгълна пирамида.



Следователно

$$S=\frac{b\,.\,k}{2}+\frac{b\,.\,k}{2}+\frac{b\,.\,k}{2}=3\,.\,\frac{b\,.\,k}{2}=\frac{3\,.\,b\,.\,k}{2}=\frac{P\,.\,k}{2}.$$

По подобен начин може да намерим **лицето на околната повърхнина** на всяка правилна пирамида.

Лицето на околната повърхнина на правилна пирамида намираме по формулата $S=\frac{P\,.\,k}{2}$, където ***P*** е периметърът на основата, а ***k*** е апотемата на пирамидата.

Лицето на пълната повърхнина $\boldsymbol{S_1}$ на правилна пирамида намираме по формулата $\boldsymbol{S_1=S+B}$, където ***S*** е лицето на околната повърхнина, а ***B*** е лицето на основата на пирамидата.

5 Намерете лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на правилна четириъгълна пирамида с апотема 8,5 dm и основен ръб 42 cm. Изразете получените резултати в квадратни дециметри.

6 Намерете лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на правилна шестоъгълна пирамида с апотема k = 10,2 cm, основен ръб b = 0,6 dm и апотема на основата a = 5,2 cm. Изразете получените резултати в квадратни сантиметри.

7 Лицето на околната повърхнина на правилна четириъгълна пирамида е 40 cm^2, а апотемата ѝ е 5 cm. Намерете основния ръб на пирамидата.

8 Лицето на околната повърхнина на правилна шестоъгълна пирамида е 6 dm^2, а основният ѝ ръб е 10 cm. Намерете апотемата на пирамидата.

9 Лицето на повърхнината на правилна триъгълна пирамида е 44,37 cm^2, лицето на основата ѝ е 15,57 cm^2, а апотемата ѝ е 3,2 cm. Намерете основния ръб на пирамидата.

Обем на пирамида

Обема на пирамида намираме по формулата $\boldsymbol{V=\frac{B\,.\,h}{3}}$, където ***B*** е лицето на основата, а ***h*** е височината на пирамидата.

10 Намерете обема на правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 5 cm и височина 7,5 cm.

11 Обемът на пирамида е 240 cm^3. Основата ѝ е ромб със страна 8 cm и височина 6 cm. Намерете височината на пирамидата.

12 Намерете височината на правилна пирамида, ако обемът ѝ е 58,32 dm^3, а лицето на основата ѝ е 16,2 dm^2.

13 Намерете обема на правилна шестоъгълна пирамида с основен ръб 0,9 dm, апотема на основата 7,8 cm и височина $\frac{1}{3}$ от апотемата на основата ѝ.

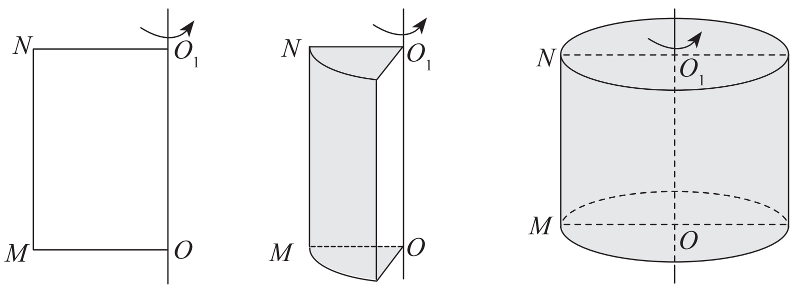
14 Повърхнината на правилна петоъгълна пирамида е 148,94 cm^2. Основният ѝ ръб е 4,4 cm, а апотемата на основата ѝ е 3,04 cm. Височината на пирамидата е 10 cm. Намерете апотемата и обема на пирамидата.

15 Пресметнете лицето на околната повърхнина и обема на правилната четириъгълна пирамида пред Лувъра в Париж, ако височината ѝ е 21,64 m, апотемата ѝ е 28 m, а основният ѝ ръб е 35,42 m.

ПРАВ КРЪГОВ ЦИЛИНДЪР.
ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА И ОБЕМ НА ЦИЛИНДЪР

Шапката, свещта, Солунската кула имат една и съща форма – **цилиндрична**.

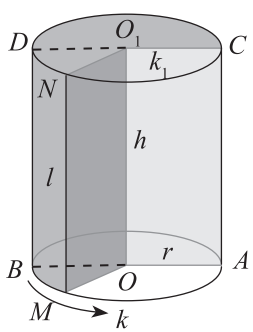
Прав кръгов цилиндър е тяло, което получаваме при пълното завъртане на правоъгълника MOO_1N около страната му OO_1.



За краткост вместо „прав кръгов цилиндър“ ще казваме само **цилиндър**.

Цилиндричната повърхнина наричаме **околна повърхнина на цилиндъра**.

Елементи на прав кръгов цилиндър. Свойства

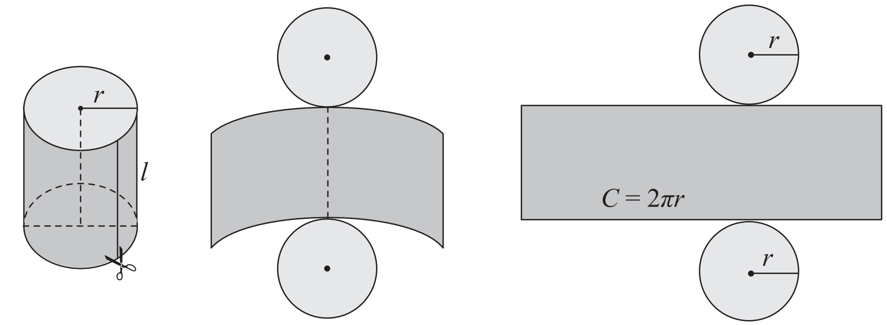


Елементите на прав кръгов цилиндър са:
образуваща на цилиндъра – $\boldsymbol{l = AC = BD = MN}$;
ос на цилиндъра – $\boldsymbol{OO_1}$;
височина на цилиндъра – $\boldsymbol{h = OO_1 = AC = BD = MN}$;
долна основа – кръгът $\boldsymbol{k(O, r)}$;
горна основа – кръгът $\boldsymbol{k_1(O_1, r)}$;
радиус на цилиндъра – $\boldsymbol{r = OA = OB = OM = O_1C = O_1D = O_1N}$.

Тъй като $\boldsymbol{OACO_1}$ е правоъгълник, височината на прав кръгов цилиндър е перпендикулярна на радиуса му – $\boldsymbol{h \perp r}$.

Образуващата на прав кръгов цилиндър е успоредна и равна на височината му – $\boldsymbol{l \parallel h}$ и $\boldsymbol{l = h}$.

Ако разрежем картонен цилиндър по образуващата и по окръжностите му и го „разгънем“ по посочения начин, ще получим фигурата:



Получената геометрична фигура, съставена от правоъгълник и два кръга, наричаме **развивка на цилиндъра**, т.е. околната повърхнина на цилиндър е правоъгълник с измерения дължината $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C = 2 \cdot \pi \cdot r}$) на окръжността на основата на цилиндъра и образуващата $\boldsymbol{l}$ на цилиндъра. Двата кръга имат равни радиуси – радиуса $\boldsymbol{r}$ на цилиндъра.

Повърхнина на прав кръгов цилиндър

Лицето $\boldsymbol{S}$ на правоъгълника наричаме **лице на околната повърхнина на цилиндъра**.

Когато към $\boldsymbol{S}$ прибавим лицата на горната и долната основа на цилиндъра, получаваме **лицето $\boldsymbol{S_1}$ на пълната повърхнина на цилиндъра**, т.е. $\boldsymbol{S = 2\pi \cdot r \cdot l}$ **– лице на околната повърхнина** на прав кръгов цилиндър, а $\boldsymbol{S_1 = S + 2 \cdot B = 2\pi \cdot r \cdot (r + l)}$ **– лице на пълната повърхнина** на прав кръгов цилиндър, където $\boldsymbol{B = \pi \cdot r^2}$ е лицето на основата.

При решаването на следващите задачи ще използваме приближението $\pi \approx 3{,}14$.

1 Намерете лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на цилиндър с радиус $r = 8$ cm и образуваща $l = 1$ dm.

2 Намерете лицето на повърхнината на цилиндър с диаметър $d = 6$ cm и височина $h = 1,5$ dm.

3 Лицето на околната повърхнина на цилиндър е 251,2 cm^2, а диаметърът му е 10 cm. Намерете височината на цилиндъра.

4 Лицето на околната повърхнина на цилиндър е 21,98 m^2, а образуващата му е 14 dm. Колко метра е радиусът на цилиндъра?

5 Лицето на повърхнината на цилиндър е 87,92 dm^2, а радиусът му е 2 dm. Намерете образуващата на цилиндъра.

6 Колко квадратни метра ламарина (с точност до 1 m^2) са необходими за изработването на водосточна тръба с дължина 10 m и с диаметър 15 cm, ако при свързването ѝ се използва ламарина, която е 5% от повърхнината на тръбата?

7 Колко квадратни метра ламарина са необходими за изработването на 1000 цилиндрични кутии за боя с диаметър 10 cm и височина 15 cm? Предвидете още 5% ламарина за залепване.

Обем на цилиндър

Обем на цилиндър намираме по формулата $\boldsymbol{V = B \,.\, h}$, където $\boldsymbol{B = \pi \,.\, r^2}$ е лицето на основата, а $\boldsymbol{h}$ е височината на цилиндъра, т.е. $\boldsymbol{V = \pi \,.\, r^2 \,.\, h}$.

8 Намерете обема на цилиндър с радиус 4 cm и височина 0,8 dm.

Решение: Прилагаме формулата за намиране на обем на цилиндър, като използваме $\pi \approx 3,14$ и $h = 0,8$ dm $= 0,8 \,.\, 10 = 8$ cm. Получаваме

$V = \pi \,.\, r^2 \,.\, h = 3,14 \,.\, 4^2 \,.\, 8 = 3,14 \,.\, 16 \,.\, 8 \approx 401,92$ cm^3.

9 Намерете обема на цилиндър с диаметър $d = 12$ cm и височина $h = 2$ dm.

10 Намерете лицето на повърхнината и обема на цилиндър, който получаваме при пълното завъртане на правоъгълник със страни 6 cm и 8 cm около:

а) по-голямата страна; б) по-малката страна.

Кой от двата цилиндъра е с по-голяма повърхнина? Кой е с по-голям обем?

11 Цилиндър има височина $h = 10$ cm. Намерете лицето на повърхнината и обема му, ако дължината C на окръжностите на основите му е:

а) $C = 8\pi$ cm; б) $C = 31,4$ cm.

12 Ако r, h, S, S_1 и V са елементи на цилиндър, определете:

а) r, S_1 и V, ако $h = 5$ cm и $S = 20\pi$ cm^2;
б) h, S_1 и V, ако $r = 10$ cm и $S = 80\pi$ cm^2;
в) h, S и S_1, ако $r = 2$ dm и $V = 24\pi$ dm^3.

13 Колко литра течност събира цистерна с диаметър 2,2 m и дължина 3 m? (1 литър = 1 dm^3)

14 Бойлер с диаметър 60 cm съдържа 120 L вода. Намерете височината на бойлера. (1 литър = 1 dm^3)

15 Цилиндричен резервоар е висок 2 m и съдържа 1570 L вода. Намерете радиуса на резервоара.

16 Тенджера с форма на цилиндър има диаметър $d = 16$ cm и височина $h = 20$ cm, а друга – $d = 20$ cm и $h = 16$ cm. Коя от двете тенджери има по-голям обем?

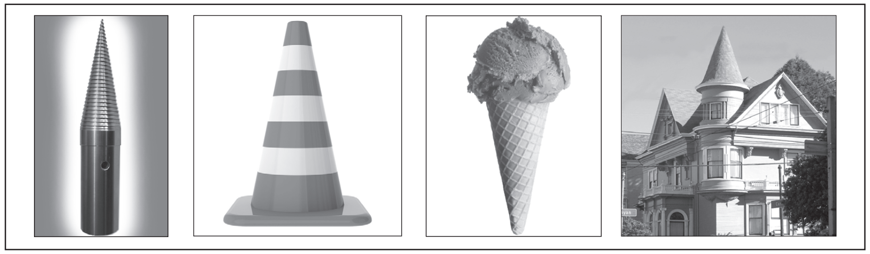
17 Водна кула има форма на цилиндър, висок 7 m. Околната ѝ повърхнина е 176 m^2. Намерете колко литра вода събира кулата, ако се напълни догоре.

18 Колко килограма е железен лост с диаметър 52 mm и дължина 2,5 m, ако 1 cm^3 от него тежи 7,8 g?

19 Желязна газопроводна тръба има външен диаметър 54 cm и вътрешен диаметър 50 cm. Колко тона тежи тръба с дължина 20 m, ако 1 cm^3 желязо тежи 7,8 g?

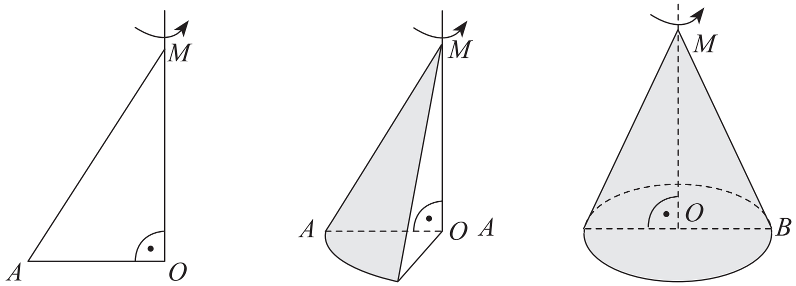
20 При построяване на една сграда е необходимо да се излеят 8 еднакви колони с форма на цилиндър. Колко кубически метра бетон са необходими за изливането на колоните, ако обиколката на всяка колона е 132 cm и височината ѝ е 4 m? ($\pi \approx \dfrac{22}{7}$)

ПРАВ КРЪГОВ КОНУС.
ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА КОНУС. ОБЕМ НА КОНУС



Уредът за цепене на дърва, пътният знак, чашката на сладоледа, покривът на кулата на къщата имат една и съща форма – **конус**.

При пълното завъртане на правоъгълния триъгълник $\boldsymbol{AOM}$ около катета му $\boldsymbol{OM}$ катетът $\boldsymbol{AO}$ описва кръг с радиус $\boldsymbol{OA}$, а хипотенузата $\boldsymbol{AM}$ описва повърхнина, която наричаме **конична повърхнина**.

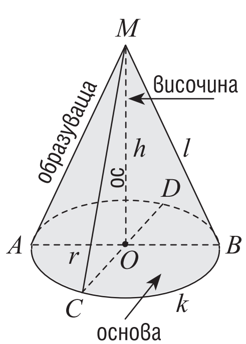


Полученото тяло е **прав кръгов конус**.

За краткост вместо **прав кръгов конус** ще казваме само **конус**.

Коничната повърхнина наричаме **околна повърхнина на конуса**.

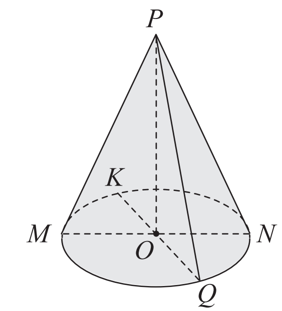
Елементи на прав кръгов конус. Свойства



Елементите на прав кръгов конус са:
връх на конуса – точката $\boldsymbol{M}$;
основа на конуса – кръгът $\boldsymbol{k\ (O,r)}$;
ос на конуса – отсечката (правата) $\boldsymbol{OM}$;
височина на конуса – $\boldsymbol{OM = h}$;
радиус на конуса – радиусът на основата:
$\boldsymbol{OA = OB = OC = OD = r}$;
диаметър на конуса – диаметърът на основата:
$\boldsymbol{AB = CD = d}$;
образуваща на конуса – отсечка, която съединява точка от окръжността $\boldsymbol{k}$ с върха M: $\boldsymbol{AM = BM = CM = DM = l}$.

Триъгълникът $\boldsymbol{AOM}$ е правоъгълен, следователно височината на прав кръгов конус е перпендикулярна на радиуса му – $\boldsymbol{h \perp r}$.

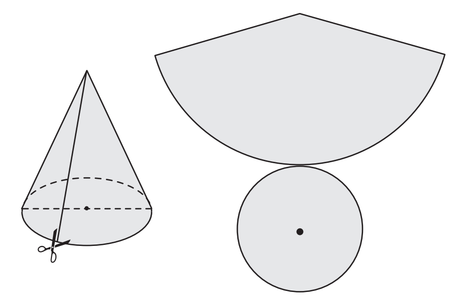
Образуващата на прав кръгов конус е по-голяма от радиуса и от височината му – $\boldsymbol{l > r}$, $\boldsymbol{l > h}$.



1 За начертания конус запишете:
а) върха на конуса;
б) образуващите;
в) радиусите;
г) диаметрите;
д) оста;
е) височината.

2 Намерете радиуса, височината и образуващата на конус, който се получава при пълното завъртане на правоъгълен триъгълник с катети $a = 6$ cm, $b = 8$ cm и хипотенуза $c = 10$ cm около:
а) катета a; б) катета b.

Ако разрежем картонен конус по образуваща и по окръжността на основата му и го „разгънем“ по посочения начин, ще получим геометрична фигура, която е съставена от кръгов сектор и кръг. Наричаме я **развивка на конуса**.



При развивка на конус околната му повърхнина се развива в кръгов сектор.

Лицето $\boldsymbol{S}$ на кръговия сектор наричаме **лице на околната повърхнина на конуса**, т.е.
$\boldsymbol{S = \pi \, . \, r \, . \, l}$.

Когато към $\boldsymbol{S}$ прибавим лицето на основата на конуса, получаваме **лицето $\boldsymbol{S_1}$ на пълната повърхнина на конуса**, т.е.

$$\boldsymbol{S_1 = S + B = \pi \, . \, r \, . \, l + \pi \, . \, r^2 = \pi \, . \, r \, . \, (l + r)}.$$

3. Намерете лицето на повърхнината на конус с радиус $r = 7$ cm и образуваща $l = 2{,}5$ dm.

4. Лицето на околната повърхнина на конус е 157 cm^2, а диаметърът му е 5 cm. Намерете образуващата на конуса.

Решение: Тъй като $d = 5$ cm, радиусът на конуса е $r = d : 2 = 5 : 2 = 2{,}5$ cm. От формулата за околна повърхнина на конус $S = \pi \,.\, r \,.\, l$, при $\pi \approx 3{,}14$, получаваме $157 = 3{,}14 \,.\, 2{,}5 \,.\, l$.

$7{,}85 \,.\, l = 157$, т.е. $l = 157 : 7{,}85 = 20$ cm.

5. Лицето на околната повърхнина на конус е 6π dm^2, а образуващата му е 20 cm. Намерете диаметъра на конуса.

6. Палатка има форма на конус (без основа) с диаметър 8 m и образуваща 5 m. Колко квадратни метра полиетиленово платно са използвани за палатката, ако за изрезки и шев са необходими 8% от повърхнината ѝ?

7. Покривът на беседка има форма на конус с диаметър 16 m и образуваща 10 m. Колко квадратни метра ламарина (с точност до 1 m^2) са необходими за покрива, ако при свързването се използват още 5% от повърхнината му?

Обем на конус

Обем на конус намираме по формулата $\boldsymbol{V = \dfrac{B \,.\, h}{3}}$, където $\boldsymbol{B = \pi \,.\, r^2}$ е лицето на основата, а $\boldsymbol{h}$ е височината на конуса, т.е.

$$V = \frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, h}{3}.$$

8. Намерете обема на конус с радиус 6 cm и височина 0,8 dm.

9. Намерете обема на конус с радиус r, диаметър d и височина h, ако:

а) $r = 1{,}5$ dm, $h = 8$ cm; б) $d = 6$ cm, $h = 0{,}8$ dm;
в) $r = 5$ dm, $h = 120$ cm.

10. Намерете обема на конус с височина 5 m и обиколка на основата му:

а) 6π m; б) 25,12 m.

11. Намерете радиуса на конус с височина $h = 15$ cm и обем $V = 45\pi$ cm^3.

12. Намерете височината на конус с радиус $r = 60$ cm и обем $V = 96\pi$ dm^3.

13. От медно конично тяло с радиус 5 cm, височина 12 cm и образуваща 13 cm е отлято цилиндрично тяло с радиус 5 cm.

а) Намерете височината на цилиндричното тяло.
б) Сравнете лицата на повърхнините на двете тела.

14. Колко тежи железен отвес с форма на конус с радиус 2 cm и височина 72 mm, ако 1 cm^3 желязо тежи 7,8 g?

15. Конусовидна купчина пясък има диаметър 3,5 m и височина 1 m. Намерете:

а) колко кубични метра е пясъкът;
б) колко тона е пясъкът, ако 1 m^3 тежи 800 kg.

16. Коничен съд с диаметър 18 dm има вместимост 1570 L. Намерете височината на съда.

17. Намерете лицето на повърхнината и обема на конус, който се получава при завъртане на правоъгълен триъгълник с катети $a = 6$ cm, $b = 8$ cm и хипотенуза $c = 1$ dm около:

а) катета a; б) катета b.

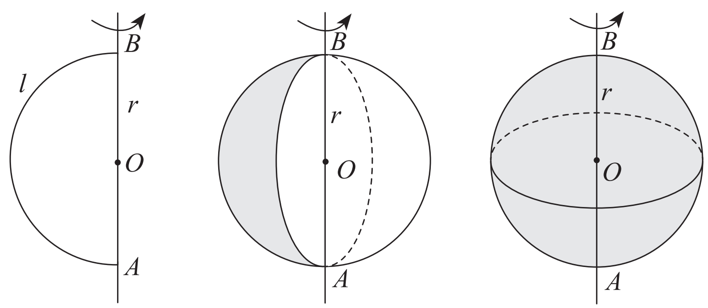
Кой от двата конуса е с по-голяма повърхнина и кой е с по-голям обем?

18. Как ще се промени обемът на конус, ако увеличим височината му 2 пъти?

19. Как ще се промени обемът на конус, ако намалим радиуса му 2 пъти?

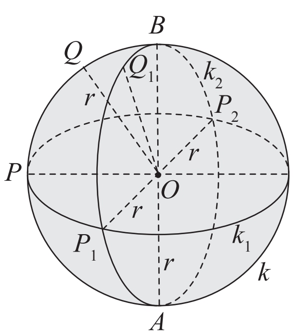
СФЕРА И КЪЛБО. ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА СФЕРА. ОБЕМ НА КЪЛБО

Футболната топка, осветителното тяло, глобусът и балонът имат една и съща форма – **сфера**.



При пълното завъртане на полуокръжност с център O и радиус r около диаметъра ѝ AB тя описва повърхнина, която наричаме **сфера**.

Елементи на сфера. Свойства



Точките върху сферата са на равни разстояния от точката $\boldsymbol{O}$, която наричаме **център** на сферата:

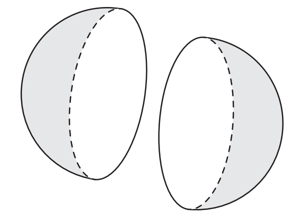
$\boldsymbol{OA = OB = OP = OP_1 = OP_2 = OQ = OQ_1 = r}$.

Точките B, P, P_1, P_2, Q и Q_1 са от полуокръжността $\boldsymbol{k}$ в някое от положенията при завъртането ѝ.

Радиус на сферата е отсечка, която съединява точка от сферата с центъра ѝ. Например радиуси са $\boldsymbol{OA = OP = OQ = r}$.

Диаметър на сферата е отсечка, която съединява две точки от сферата и минава през центъра ѝ. Например диаметри са $\boldsymbol{AB = P_1P_2 = 2r = d}$.

Голяма окръжност е всяка окръжност, която разделя сферата на две еднакви части, които наричаме **полусфери**.



Например на чертежа големи окръжности са $\boldsymbol{k(O, r)}$, $\boldsymbol{k_1(O, r)}$ и $\boldsymbol{k_2(O, r)}$.

Лицето $\boldsymbol{S}$ на сфера с радиус $\boldsymbol{r}$ е $\boldsymbol{S = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$, $\boldsymbol{S = \pi \cdot d^2}$.

(1) Намерете лицето на сфера с радиус 25 cm. Запишете го в квадратни дециметри.

Решение: Прилагаме формулата за повърхнина на сфера за $\pi \approx 3{,}14$ и $r = 25\text{ cm} = 2{,}5\text{ dm}$, т.е. $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 78{,}5\text{ dm}^3$.

(2) Намерете радиуса на сфера, която има лице 314 dm^2.

Решение: От формулата за повърхнина на сфера $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, като използваме $\pi \approx 3{,}14$, получаваме:

$314 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2$

$r^2 = 314 : 12{,}56$

$r^2 = 25$, т.е. $r = 5$ dm.

(3) Радиусът на земното кълбо е приблизително 6376 km. Намерете повърхнината му.

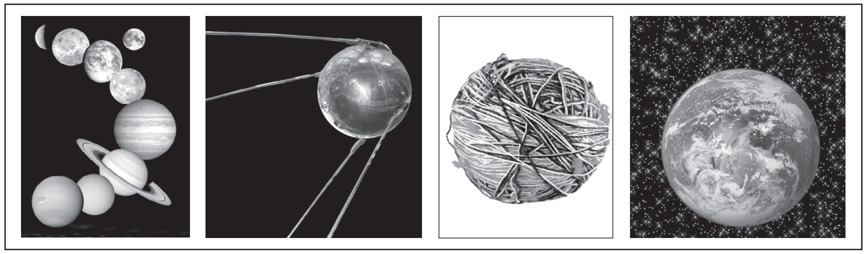
(4) Намерете диаметъра на сфера, ако лицето ѝ е 615,44 cm^2.

(5) Колко квадратни метра кожа са необходими за изработването на 100 футболни топки с диаметър 24 cm, ако за изрезки са необходими още 15% кожа?

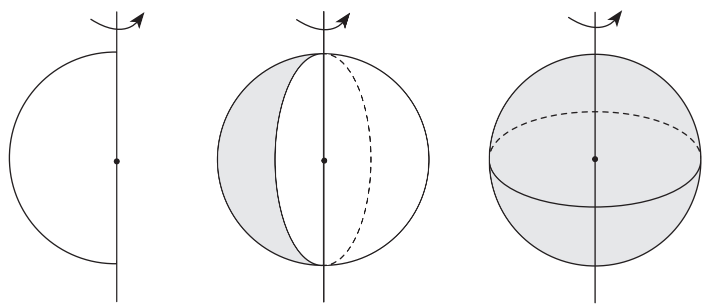
(6) Каква е дължината на радиуса на сфера с лице 36π dm^2?

а) 18 cm б) 9 dm в) 3 dm г) 3 cm

Кълбо. Обем на кълбо

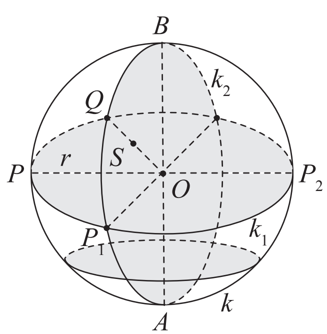


Небесните тела, изкуственият спътник, кълбото прежда, Земята имат една и съща форма – **кълбо**.



При пълното завъртане на полукръг около диаметъра му полукръгът описва **кълбо**, а полуокръжността – сфера, която е повърхнината на **кълбото**.

Елементи на кълбо. Свойства



Центъра O и радиуса r на сферата наричаме **център** и **радиус** на кълбото.
център на кълбото – O
радиус на кълбото – $OA = OQ = OP = OP_1 = r$
диаметър на кълбото – $AB = PP_2 = d$
голям кръг – $k(O; r)$, $k_1(O; r)$, $k_2(O; r)$

Всяка точка от кълбото е на разстояние от центъра, по-малко или равно на радиуса: $OQ = r;\ OS < r$.

Всеки голям кръг разделя кълбото на две еднакви части, които наричаме **полукълба**.

Обема V на кълбо с радиус $\boldsymbol{r}$ намираме по формулата $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$.

(7) Намерете обема на кълбо с диаметър 18 cm.

Решение: Тъй като $d = 18$ cm, радиусът на кълбото е $r = d : 2 = 18 : 2 = 9$ cm. Прилагаме формулата за обем на кълбо и получаваме:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^3 \approx 3052{,}08\ \text{cm}^3$. ($\pi \approx 3{,}14$)

(8) Намерете радиуса на кълбо с обем 36π dm^3.

Решение: Тъй като $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, то $36\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ и $r^3 = (36 \cdot 3) : 4$.
$r^3 = 27$, т.е. $r^3 = 3^3$. Следователно радиусът на кълбото е 3 cm.

(9) Колко килограма тежи сребърна топка с радиус 5 cm, ако 1 cm^3 сребро тежи 10,5 g?

Решение: Сребърната топка е кълбо. Прилагаме формулата за намиране на обем на кълбо, като използваме $\pi \approx 3{,}14$, и получаваме:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^3 = \frac{1570}{3} \approx 523{,}3\ \text{cm}^3$;

$523{,}3 \cdot 10{,}5 \approx 5495\ \text{g} = 5{,}495\ \text{kg}$.

(10) Намерете радиуса на кълбо с обем V, ако:
а) $V = 113{,}04$ dm^3; б) $V = 288\pi$ cm^3.

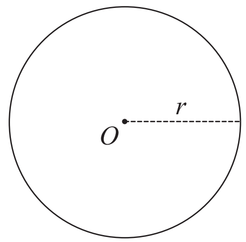
(11) Кълбо от мед тежи 893,016 g. Намерете радиуса на кълбото, ако 1 cm^3 мед тежи 7,9 g.

(12) С колко сантиметра ще се повиши нивото на водата в цилиндрична мензура с диаметър 12 cm, ако потопим в нея метално кълбо с радиус 3 cm?

(13) При изваждане на метално кълбо от цилиндрична мензура с диаметър 6 cm нивото на водата се е понижило с 4 cm. Намерете радиуса на кълбото.

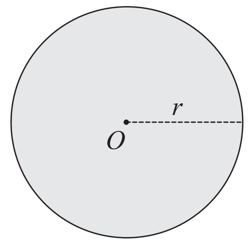
ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ И ТЕЛА – ОБОБЩЕНИЕ

Геометрични фигури



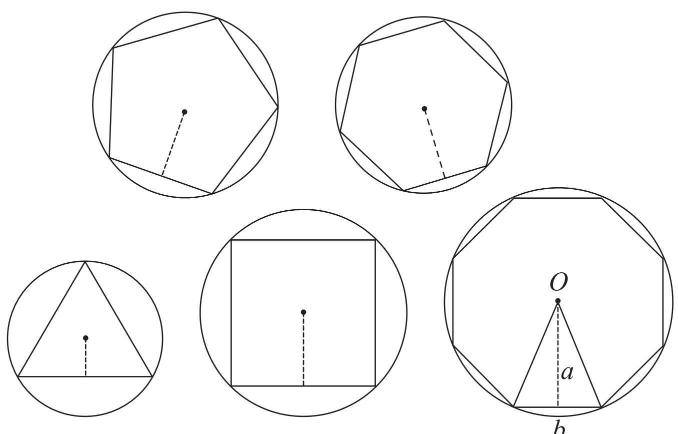
Окръжност

$C = 2\pi r = \pi d$



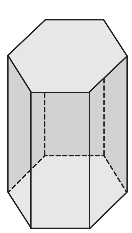
Кръг

$S = \pi r^2$



Правилен многоъгълник

Геометрични тела

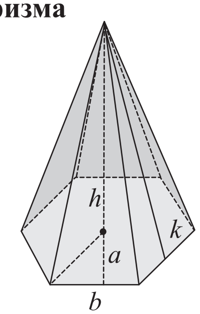


Правилна призма

$S = Ph$

$S_1 = S + 2B$

$V = Bh$



Правилна пирамида

$S = \dfrac{Pk}{2} = \dfrac{nbk}{2}$

$S_1 = \dfrac{Pk}{2} + \dfrac{Pa}{2} = \dfrac{P}{2}(k + a)$

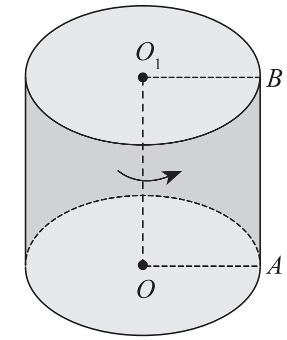
$V = \dfrac{Bh}{3} = \dfrac{\frac{Pa}{2} \cdot h}{3}$

Цилиндър

$S = Ch = 2\pi rh$

$S_1 = 2\pi r(h + r)$

$V = Bh = \pi r^2 h$

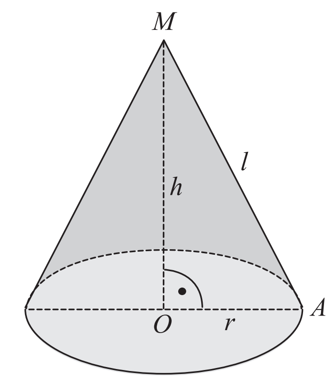


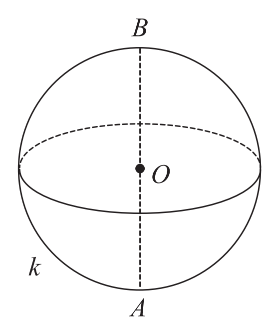
Конус

$S = \pi rl$

$S_1 = S + B = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$

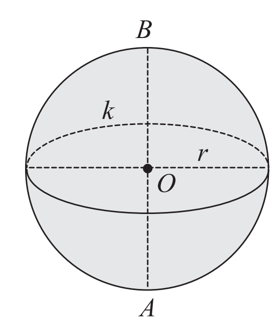
$V = \dfrac{Bh}{3} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$





Сфера

$S = 4\pi r^2$



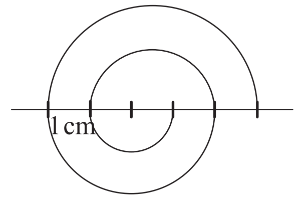
Кълбо

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

При пресмятане на лица на равнинни фигури, лица на повърхнини и обеми на тела трябва да приведем елементите им към една и съща мерна единица.

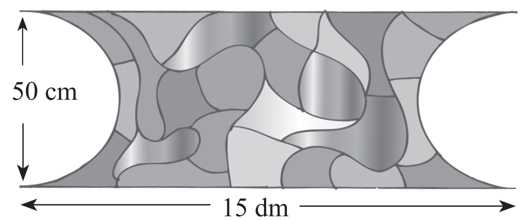
ОБЩИ ЗАДАЧИ

1 Спиралата е съставена от четири полуокръжности, съответно с диаметър 2 cm, 3 cm, 4 cm и 5 cm. Намерете дължината на спиралата.

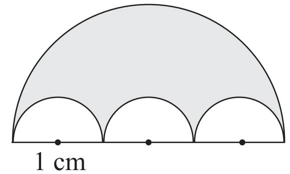


2 Намерете лицето на рамката на гоблена, ако единият диаметър е 30 cm, а другият е 26 cm.

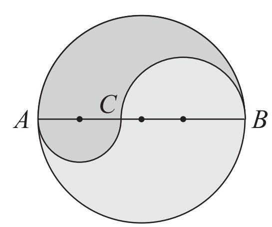
3 Намерете лицето на стъклопис в катедрала с посочените размери.



4 Намерете обиколката и лицето на оцветената фигура, заградена с полуокръжностите.



5 Пресметнете и сравнете обиколките и лицата на оцветените фигури, ако $AC = 2$ cm и $CB = 4$ cm.

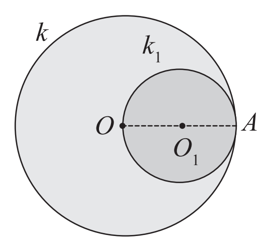


6 Дадени са окръжностите k (O; OA) и k_1 (O_1; O_1A). Намерете частното от:

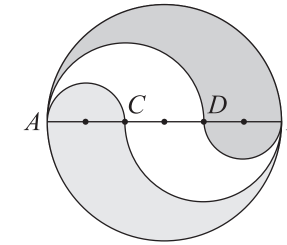
а) дължините на окръжностите k и k_1;

б) лицата на кръговете, определени от k и k_1;

в) лицата на различно оцветените фигури.



7 Ако $AC = CD = DB$, покажете, че четирите полуокръжности разделят кръга на три равни части.



8 Обиколката на правилен осмоъгълник е 25,6 cm, а лицето му е 48,64 cm^2. Намерете апотемата на многоъгълника.

9 Лицето на правилен десетоъгълник е 300 dm^2, а апотемата му е 3 dm. Намерете обиколката му.

10 Сравнете обиколките и лицата на правилен петоъгълник със страна 10 cm и апотема 6,9 cm и правилен осмоъгълник със страна 6,25 cm и апотема 7,5 cm.

11 Правилна четириъгълна призма има основен ръб 3 cm и лице на повърхнината 78 cm^2. Намерете:

а) лицето на околната ѝ повърхнина;

б) обема на призмата.

12 Правилна триъгълна призма има основен ръб 4 cm, височина 6 cm и обем 42 cm^3. Намерете височината на основата на призмата.

13 Правилна шестоъгълна призма има височина 7 cm и лице на околната повърхнина 210 cm^2. Намерете:

а) основния ръб на призмата;

б) лицето на повърхнината и обема на призмата, ако апотемата ѝ е 4,3 cm.

14 Правилна четириъгълна пирамида има основен ръб 10,4 cm, височина 4 cm и обем 62,4 cm^3. Намерете лицето на околната и на пълната повърхнина на пирамидата, ако апотемата ѝ е 5 cm.

15 Правилна четириъгълна пирамида има височина 12 cm, лице на околната повърхнина 360 cm^2 и обем 400 cm^3. Намерете основния ръб и апотемата на пирамидата.

16 Радиусът на земното кълбо е приблизително 6400 km, а водната му площ е $\frac{3}{4}$ от повърхнината му. Намерете лицето на повърхнината на земната суша.

ОБИКНОВЕНИ И ДЕСЕТИЧНИ ДРОБИ (ПРЕГОВОР)

Числата, за които учихме дотук, са:

– числото 0;

– числата, с които броим – 1, 2, 3, 4, ... (наричаме ги *естествени числа*);

– числата, които показват колко и какви части от едно цяло са взети – $\frac{1}{3}, \frac{7}{2}, \frac{3}{4}, \frac{113}{42}$ и др. (наричаме ги *обикновени дроби*);

– *правилни дроби*, в които числителят е по-малък от знаменателя – $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ и др.;

– *неправилни дроби*, в които числителят е по-голям или равен на знаменателя – $\frac{7}{2}, \frac{113}{42}$ и др.;

– *стесени числа*, които се състоят от цяла и дробна част – $3\frac{1}{4}, 5\frac{13}{17}$ и др.;

– *крайни десетични дроби* – 0,231; 12,345 и др. (записваме ги с краен брой цифри след десетичната запетая);

– *безкрайни периодични десетични дроби* – 0,45454545... = 0,(45) (имат безброй много периодично повтарящи се десетични знаци).

Сравняване на числа

Сравняваме естествените числа и десетичните дроби по разреди, като започваме от най-големия разред.

(1) Сравнете: а) 202 и 2020; 2023 и 2032; 3051 и 3045;
б) 2,02 и 2,0; 2,023 и 2,032; 30,51 и 30,45.

От две дроби с еднакъв знаменател по-голяма е тази, която има по-голям числител. Така $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$ точно когато $a > c$.

От две дроби с еднакъв числител по-голяма е тази, която има по-малък знаменател. Така $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$ точно когато $b < c$.

Понякога трябва да разширим (съкратим) по подходящ начин едната или двете дроби и чак след това да ги сравним.

(2) Сравнете: $\frac{4}{27}$ и $\frac{5}{27}$, $\frac{4}{5}$ и $\frac{2}{10}$, $\frac{8}{7}$ и $\frac{9}{8}$, $\frac{8}{9}$ и $\frac{3}{5}$.

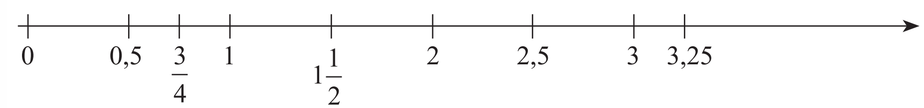
Изобразяване на числата върху числов лъч

Може да изобразим с точка върху числов лъч, сочещ надясно, всяко от познатите ни числа. Нулата изобразяваме в началото на лъча. Отсечката от началото на лъча до точката, с която изобразяваме числото 1, наричаме единична отсечка. Разстоянието от началото на лъча до точката, изобразяваща някое число, е равно на числото, умножено по дължината на единичната отсечка.

По-голямото от две числа изобразяваме върху лъча надясно от по-малкото. Правилните дроби изобразяваме върху числовия лъч между 0 и числото 1, а неправилните – надясно от 1.

(3) Върху числов лъч с единична отсечка, равна на 4 cm, изобразете числата: 1; 2; 3; 0,5; $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{2}$; 2,5; 3,25.

Решение: Чертаем хоризонтална права линия. Отбелязваме върху нея, в левия край на листа, точка, съответстваща на числото 0. В десния край на листа поставяме стрелка върху правата. За всяко от числата пресмятаме разстоянието от началото (числото 0) до точката от лъча, изобразяваща съответното число, т.е. умножаваме числата по дължината на единичната отсечка.



За естествените числа 1, 2 и 3 тези разстояния са съответно 1 . 4 = 4 cm, 2 . 4 = 8 cm и 3 . 4 = 12 cm. За дробите $\frac{3}{4}$ и $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ имаме съответни разстояния $\frac{3}{4} . 4 = 3$ cm и $\frac{3}{2} . 4 = 6$ cm. За десетичните дроби 0,5; 2,5 и 3,25 имаме съответно 0,5 . 4 = 2 cm; 2,5 . 4 = 10 cm; 3,25 . 4 = 13 cm. Измерваме с линийка тези разстояния от началото на лъча, нанасяме краищата им върху лъча и записваме до тях съответните числа.

Направете чертежа самостоятелно на отделен лист.

ПОЛОЖИТЕЛНИ И ОТРИЦАТЕЛНИ ЧИСЛА. МНОЖЕСТВО НА ЦЕЛИТЕ ЧИСЛА И МНОЖЕСТВО НА РАЦИОНАЛНИТЕ ЧИСЛА. ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА ВЪРХУ ЧИСЛОВА ОС

Във всекидневието често срещаме стойности, които освен големина имат и знак.

Например:

Температурата може да е под или над нулата.

Надморската височина може да е под или над морското равнище.

Паричните суми може да са приход или разход.

Разликата в състоянието на дадена величина може да е увеличение или намаление и т.н.

Познатите ни досега числа не са достатъчни за описване на заобикалящия ни свят.

Затова въвеждаме нови числа:

–12°C (четем: „минус 12 градуса по Целзий“) за температура под нулата;

–122 m (минус 122 метра), когато височината е под морското равнище;

–2000 лв. приход (минус 2000 лв. приход, или 2000 лв. разход) и т.н.

Новите числа записваме, като пред числото поставяме знак „–“ (минус), и ги наричаме **отрицателни числа**.

Всички числа, които знаехме досега, освен нулата, наричаме **положителни**. Те имат знак „+“ (плюс).

Числото 0 няма знак (то не е нито положително, нито отрицателно).

Числата 0, +1, –1, +2, –2, +3, –3, ... (нулата, естествените числа и отрицателните числа, получени чрез записване на знака „–“ пред естествените числа) наричаме **цели числа**.

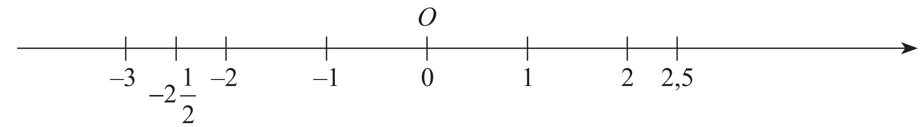
Нулата, естествените числа, дробните числа и отрицателните числа, получени чрез записване на знака „–“ пред естествените и дробните числа, наричаме **рационални числа**.

Рационални числа са всички цели числа, както и всички положителни и отрицателни дробни числа.

Права с избрана точка *O* върху нея за начало, единична отсечка и положителна посока наричаме **числова ос**.

Обикновено за числова ос чертаем хоризонтална права. Върху нея избираме за положителна посока посоката, надясно от началото *O*, а другата посока наричаме отрицателна.

Може да изобразим върху числовата ос всяко рационално число. Нулата изобразяваме в началото *O*. При избрана единична отсечка изобразяваме положителните числа в положителната посока по познатия начин, а отрицателните – по същия начин, но в отрицателната посока.



1 От дадените числа запишете в един ред положителните, а в друг ред – отрицателните, и ги прочетете:

–5; 4; 1,25; –0,6; 0; 4,(76); –10,6(7); 1000; –1534.

2 Запишете с положителни и отрицателни числа.

а) Асен има очила с 2,5 диоптъра за късогледство.

б) Янка има очила с 1,25 диоптъра за далекогледство.

в) Повърхността на Мъртво море е на 397 m под морското равнище.

Упътване. В оптиката отбелязват късогледството с „–“, а далекогледството – с „+ “.

3 Правилно ли е попълнена таблицата за изменението на нивото на р. Дунав за определена дата?

Видин	**Лом**	**Никопол**	**Русе**
Покачване с 3 cm	Спадане с 1 cm	Спадане с 2 cm	Без изменение
+3 cm	–1 cm	–2 cm	0 cm

ПРОТИВОПОЛОЖНИ ЧИСЛА. АБСОЛЮТНА СТОЙНОСТ (МОДУЛ) НА РАЦИОНАЛНО ЧИСЛО. СРАВНЯВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

Ако две числа се различават само по знак, казваме, че са **противоположни** (например двойките числа +1 и –1; 3 и –3; – 9,2 и 9,2; $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$; –0,25 и $\frac{1}{4}$ = 0,25).

Противоположното число на *a* означаваме с –*a*. Записа –5 може да прочетем по два начина: „минус 5“ и „противоположното число на 5“.

Числото 0 е противоположно на себе си: –0 = 0.

Противоположното число на –*a* е *a*, т.е. $-(-a) = a$.

Образите на две противоположни числа *a* и –*a* върху числовата ос са разположени от двете страни на началото *O* и са на равни разстояния от него.

1 Намерете противоположните числа на: 12,3; –7; 0; – (+3); – (–7,8).

2 Какво число – положително, отрицателно или нула, ще бъде –*a*, ако:

а) *a* е положително; б) *a* е отрицателно; в) *a* е нула?

Разстоянието от образа на дадено рационално число върху числова ос до началото *O*, разделено на дължината на единичната отсечка на оста, наричаме **абсолютна стойност (модул)** на рационалното число. Абсолютната стойност (модула) на числото *a* означаваме с $|a|$.

Например: $|1| = 1$, $|2| = 2$, $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-1| = 1$, $|-2| = 2$, $|-3| = 3$.

Абсолютната стойност на положително число или нула е самото число, а на отрицателно число е противоположното му число.

Понеже всяка двойка противоположни числа се намира на еднакво разстояние от началото *O*, имаме $|a| = |-a|$.

3 Без да чертаете, определете на какво разстояние от началото *O* на числовата ос е образът на числото, ако дължината на единичната отсечка е 1 cm.

а) 3,7 б) –0,3 в) – (–4) г) $-|0,6|$

От две рационални числа по-голямо е това, което е изобразено по-надясно върху числова ос; по-малко е това, което е изобразено по-наляво върху числова ос.

Положителните числа изобразяваме надясно от началото на оста и от образите на отрицателните числа, защото всяко положително число е по-голямо от нулата и от всяко отрицателно число. Всяко отрицателно число е по-малко от нулата и от всяко положително число, затова изобразяваме отрицателните числа наляво от началото на оста.

Числото *a* е положително точно когато $a > 0$, числото *a* е отрицателно точно когато $a < 0$.

Ако е изпълнено $a > b$ ($a < b$) или $a = b$, пишем $a \geq b$ ($a \leq b$) и казваме, че *a* е по-голямо или равно (по-малко или равно) на *b*.

Ако $a \geq 0$ ($a \leq 0$), казваме, че числото *a* е **неотрицателно** (**неположително**).

От две положителни числа $a > 0$ и $b > 0$ по-голямо е това, което се изобразява по-далеч от *O*, т.е. което има по-голям модул.

От две отрицателни числа $a < 0$ и $b < 0$ по-голямо е това, което се изобразява по-близо до *O*, т.е. което има по-малък модул.

4 Подредете числата –8; 2; –3,5; 0; –1; 4; $\frac{1}{3}$, като започнете от най-малкото, и ги изобразете върху числова ос.

5 За всяко от числата 2, 5, –3, 10 и –17 запишете друго число със същия модул. Какви са даденото и написаното число?

6 Открийте верните твърдения.

а) Числото 0 е положително. б) Числото 0 е цяло.
в) Числото 0 е отрицателно. г) Числото 0 е рационално.

7 Посочете вярното твърдение.

а) Модулът на всяко рационално число е самото число.
б) Модулът на всяко рационално число е противоположното му число.
в) Модулът на всяко рационално число е положително число или нула.
г) Модулът на всяко рационално число е отрицателно число.

СЪБИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА С ЕДНАКВИ ЗНАЦИ

При събиране на рационални числа с еднакви знаци първо събираме модулите на събираемите. След това пред получения сбор поставяме знака на събираемите:

$$a+b=+(|a|+|b|), \text{ когато } a\geq 0 \text{ и } b\geq 0;$$

$$a+b=-(|a|+|b|), \text{ когато } a\leq 0 \text{ и } b\leq 0.$$

1 Определете знака на сбора и ако е възможно, опростете записа, като пропуснете знака „+“ на събираемите.

а) –7,9 + (–42) б) $+\frac{3}{2}+(+4{,}7)$

в) +6,26 + (+0,42) г) $-2\frac{5}{6}+\left(-\frac{3}{4}\right)$

д) +4 + (+7) е) –6 + (–12)

ж) 9 + 14 з) –18,5 + (–0,5)

2 Пресметнете.

а) –3 + (–2) б) –17 + (–21)

в) 13 + 25 г) 49 + 53

д) –19,6 + (–0,4) е) 8,21 + 2,69

ж) 11 + 1,75 з) –23 + (–47)

3 Определете положението на топче, което се придвижва от началото на числова ос на разстояние 3 единици и след това – на още 4 единици в:

а) положителна посока; б) отрицателна посока.

4 Колко е общо приходът от 250 лв. и от 100 лв.?

5 Запишете с рационално число с колко се е променила масата на кораб, ако е натоварен:

а) с 1000 kg товар и после – с още 2000 kg;

б) с 2000 kg товар и после – с още 2000 kg.

6 Как се е променило теглото на Соня, ако:

а) е напълняла с 1 kg и после – с още 2 kg;

б) е отслабнала с 2 kg и после – с още 2 kg.

7 Теглото на Соня се променило с –1 kg. Напълняла ли е, или е отслабнала?

8 На какво ниво са се спуснали пещерняци в пещерата Райчова дупка, ако първо са се спуснали на 100 m, а после – на още 35 m?

9 Пресметнете сбора.

а) |153| + |4| б) |–1| + |–2| в) |13| + |37|

г) |–3| + |–17| д) |–8,5| + | –1| е) |105| + |297|

10 Пресметнете.

а) |–3 + (–2)| б) 13 + 25 в) –19,6 + (–0,4)

г) |–(11 + 1,75)| д) –|19 + 7| е) –14,5 + (–0,5)

ж) –7 + (–21) з) 49 + 53 и) |–8,31| + |–2,69|

11 Ако $a > 0$ и $b > 0$, кои от твърденията не са верни?

а) $a + b < a$ б) $a + b > a$ в) $a + b > b$

г) $a + b < b$ д) $-a + (-b) > -a$ е) $-a + (-b) < -b$

Упътване. Ако събираме няколко положителни числа, сборът е по-голям от всяко от събираемите.

Ако събираме няколко отрицателни числа, сборът е по-малък от всяко от събираемите.

12 Пресметнете.

а) (–3) + (–8) + (–14) б) (–21) + (–55) + (–47)

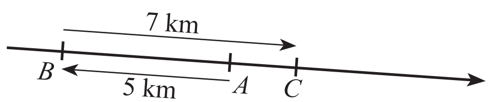
в) (–87) + (–35) + (–101) г) (–234) + (–432) + (–324)

д) (–562) + (–148) + (–213) е) 1024 + 2041 + 4120

СЪБИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА С РАЗЛИЧНИ ЗНАЦИ. СВОЙСТВА НА СЪБИРАНЕТО

(1) Геоложка експедиция построила базовия си лагер на брега на река. Един ден геолозите изминали 5 km по брега в посока, обратна на течението на реката, след което изминали още 7 km със сал по реката и останали да нощуват там. (Салът няма мотор и се движи по течението на реката.) На какво разстояние и в каква посока от базовия лагер са останали да нощуват геолозите?

Решение: Нека базовият лагер да е в точка A, а течението на реката да бъде по посоката, показана на чертежа. Учените първо са изминали 5 km срещу течението и са пристигнали в точка B. После са изминали 7 km по течението, подминали са базовия лагер (точка A) и са нощували в точка C, която се намира на 2 km от точка A в посока по течението на реката.



Да си представим, че реката е права линия. Може да я разглеждаме като числова ос. Да изберем точката A за начало, единичната отсечка да е равна на 1 km, а посоката на течението да изберем за положителна. Така разстоянието от базовия лагер A до точката C може да представим като –5 + (+7) = +2 (в точка B се изобразява числото –5, в точка A – числото 0, а в точка C – числото +2).

При събиране на рационални числа с различни знаци и модули първо от по-големия модул изваждаме по-малкия. След това пред получената разлика поставяме знака на събираемото с по-голям модул:

$a+b=+(|a|-|b|)$, когато $a \geq 0$, $b \leq 0$ и $|a|>|b|$;
$a+b=-(|a|-|b|)$, когато $a \leq 0$, $b \geq 0$ и $|a|>|b|$;
$a+b=+(|b|-|a|)$, когато $a \leq 0$, $b \geq 0$ и $|b|>|a|$;
$a+b=-(|b|-|a|)$, когато $a \geq 0$, $b \leq 0$ и $|b|>|a|$.

(2) Какъв е знакът на сбора?
а) +18 + (–9) б) –12,5 + (+4)
в) $+2\frac{1}{5}+(-1{,}2)$ г) $1\frac{3}{7}+\left(-\frac{3}{7}\right)$

(3) Опростете записа на израза и пресметнете.
а) –5 + (+7) б) +3 + (–10)
в) –13 + (+24) г) –15 + (+0,7)

(4) Иван бил в командировка, за която похарчил 125 лв. След завръщането му от касата на предприятието му възстановили цялата сума. Колко лева от собствените си пари е похарчил Иван за командировката и с колко са се променили парите му?
Упътване. Използвайте, че:
Сборът на две противоположни числа е равен на нула:
$a+(-a)=(-a)+a=0$ (противоположните числа се „унищожават“).
Сборът на рационално число с нулата е равен на числото
$0+a=a+0=a$ (в сбор нулата се пропуска).

За действието събиране на рационални числа са в сила свойствата, които познаваме за неотрицателните числа:
$\boldsymbol{a+b=b+a}$ – разместително свойство;
$\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c}$ – съдружително свойство.

Разместителното и съдружителното свойство показват, че може да събираме и повече от две числа, като ги разместваме и групираме по подходящ начин.

(5) Пресметнете.
а) –7 + (–3) + (–5) б) –26 + 38 + (–3)
в) 19 + 52,4 + (–19) г) –9,2 + 4 + (–1,8) + 6

Когато събираме положителни и отрицателни числа, понякога е удобно да съберем отделно положителните, отделно – отрицателните, и после да съберем получените числа.

(6) Кои са пропуснатите числа?
а) 3 + 5 + (–8) = 3 + (–8) + ... + (–2))
б) 6 + ... + (–1) = (–1) + (6 + (–2))
в) –4 + ... + (–7) = 2 + (... + (–4))

ИЗВАЖДАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

След въвеждането на отрицателните числа вече може от по-малко число да извадим по-голямо, т.е. винаги може да намерим разликата на две рационални числа.

В множеството на рационалните числа също определяме действието изваждане като обратно действие на събирането.

Разликата на две рационални числа $a - b$ намираме, като към умаляемото a прибавяме противоположното число на умалителя ($-b$), т.е.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Тук отново може да направим проверка чрез събиране: $a = b + c$.

Ако приложим правилата за събиране на число с нула и за събиране на противоположни числа, получаваме още свойства на разликата:

$$a - 0 = a;\ a - a = 0;\ 0 - a = -a.$$

1 Кои са умаляемото, умалителят и противоположното число на умалителя?

а) +45 – (+13) б) +27 – (–32) в) –15 – (+20)
г) –21 – (+16) д) –63 – (–14) е) +87 – (–35)

2 Пресметнете.

а) 5 – (–2) б) –9 – (–4) в) –4 – (–9)
г) 10 – 15 д) 16 – (–14) е) –9 – 16

Решение:

а) 5 – (–2) = 5 + 2 = 7
б) –9 – (–4) = –9 + 4 = –5
в) –4 – (–9) = –4 + 9 = 5
г) 10 – 15 = 10 + (–15) = –5
д) 16 – (–14) = 16 + 14 = 30
е) –9 – 16 = –9 + (–16) = –25

3 Пресметнете разликата и направете проверка със събиране.

а) 18 – 20 б) 12,8 – 12,8 в) –20 – 18
г) 18 – (–20) д) –9,3 – 4,7 е) –15 – (–25)

4 Опростете записа на разликата, като пропуснете знака „+“.

а) +15,6 – (+4) б) –9,3 – (+6,3) в) +10 – (+10)

5 Запишете разликата като сбор.

а) 29 – (–9,6) б) –16 – (–4) в) –16 – 3,7 г) 5,4 – 10,2

6 Заради приливите и отливите нивото на водата в морските пристанища непрекъснато се мени. В едно пристанище нивото на водата първо се изменило с a m спрямо нивото в началото на деня, после – с b m спрямо нивото в началото на деня. Намерете изменението на нивото на водата в пристанището за времето между двете наблюдения, ако:

а) a = 2,75 m, b = 0,87 m; б) a = 1,42 m, b = 1,14 m;
в) a = –0,54 m, b = –2,05 m; г) a = –1,15 m, b = –1,67 m.

Решение: в) За да пресметнем търсеното изменение, трябва да намерим $b - a$, т.е. изменението на нивото на водата между първото и второто наблюдение се пресмята, като от второто изменение извадим първото: $b - a$ = –2,05 – (–0,54) = –2,05 + 0,54 = –1,51 m. Следователно между двете наблюдения нивото на водата се е понижило с 1,51 m.

7 Часовото време в Чикаго е с 8 h по-назад от това в София. Колко е часът:

а) в София, ако в Чикаго е 1 ч. 40 мин. следобед;
б) в Чикаго, ако в София е 5 ч. следобед?

8 През първата седмица на активно спортуване масата на Васил се променила с x kg, а през втората – с y kg. С колко килограма се е променила масата му през двете седмици? Решете задачата, ако:

а) x = 0,670 kg, y = –0,460 kg;
б) x = –0,670 kg, y = –0,460 kg.

Във всеки от случаите преценете напълнял ли е, или е отслабнал Васил.

9 С колко градуса температурата на кипене на азота –195,8 °C е по-висока от температурата му на топене –209,86 °C?

Решение: –195,8 – (–209,86) = –195,8 + 209,86 = 14,06

СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА. РАЗКРИВАНЕ НА СКОБИ

По правилото за изваждане израз, в който участват само събиране и изваждане, може да представим като сбор на рационални числа.

Сбора на положителни числа, отрицателни числа и нула наричаме **алгебричен сбор**.

Понякога се налага да извършим **опростяване на алгебричния сбор**, като изпуснем скобите и знаците за събиране и запишем само събираемите с техните знаци.

1 Съставете алгебричен сбор със събираемите.

а) 8; 12; –4,5; 4,5 б) –0,5; –0,3; 0,3 в) 3,12; –4,15; –0,75; –6

2 Опростете записа и пресметнете.

а) +15 + (–9) – (–4) – (+6) б) –42 – (+3,8) + (–34,2)

Решение:

Пропускаме знака „+“ и скобите и записваме числото в скобите с неговия знак (в началото на израза знакът „+“ не се записва):
$+a + (+b) = a + b$;
$a + (-b) = a - b$.

Пропускаме знака „–“ и скобите и записваме числото в скобите с противоположния му знак, т.е. записваме противоположното му число:
$a - (+b) = a + (-b) = a - b$;
$a - (-b) = a + (+b) = a + b$.

а) +15 + (–9) – (–4) – (+6) = 15 – 9 + 4 – 6 = (15 – (9 + 6)) + 4 = 4;

При подходящо разместване и групиране може да опростим пресмятането.

б) –42 – (+3,8) + (–34,2) = –42 – 3,8 – 34,2 = –42 – (3,8 + 34,2) = –42 – 38 = –80.

3 Пресметнете алгебричния сбор.

а) 15 – 21 – 19 б) –8 + 14 – 8 + 17 в) –81 + 46 – 25 – 46

Решение:

а) 15 – 21 – 19 = 15 – 40 = –25

б) –8 + 14 – 8 + 17 = –8 – 8 + 17 + 14 = 1 + 14 = 15

в) –81 + 46 – 25 – 46 = –81 – 25 + 46 – 46 = –106 + 0 = –106

4 Пресметнете.

а) –26 – 15 + 45 + 16 б) 12,1 – 4,56 – 10,44 + 2,4

в) –26,5 – 151 + 45 + 16,5 г) –4 – 0,6 + 12 + 0,2

Решение: а) –26 – 15 + 45 + 16 = –26 + 16 – 15 + 45 = –10 + 30 = 20

5 Пресметнете.

а) –4 + 18 – 6 – 19 – 0 б) 12 – 15 + 14

в) 7 – 20 – 8 + 20 г) 8,7 – 10 + 4,3

6 Опростете записа и пресметнете.

а) 15 + (–9) – (–4) – (+6) б) –42 – (+3,8) + (–34,2)

Решение:

а) 15 + (–9) – (–4) – (+6) = 15 – 9 + 4 – 6 = 4

б) –42 – (+3,8) + (–34,2) = –42 – 3,8 – 34,2 = –42 – 38 = –80

7 Опростете и пресметнете.

а) 23 – (–3) + (–13) + 6 б) 150 + (–50) – (+50) + 1

в) 7,3 – (–8,2) + (–24,3) г) 27 – (–3) + (–3) – (–23)

8 Пресметнете.

а) 6 – |–4| – (–4) б) 0 – (+6) + |–6|

в) 2,3 + |–6,3| – (–3) г) –|–10| + (–10) – (–3)

Решение:

а) 6 – |–4| – (–4) = 6 – 4 + 4 = 2 + 4 = 6

9 Пресметнете.

а) –26 – 15 + 45 + 16 б) 12,1 – 4,56 – 10,44 + 2,4

в) $-26{,}5 - 15\frac{3}{4} + 45\frac{3}{4} + 16{,}5$ г) $-4\frac{3}{5} - 12\frac{1}{5} + 0{,}2$

д) 4 – |12| е) 4 – |–12|

ж) 4 – (+12) з) 4 – (–12)

Решение:

е) 4 – |–12| = 4 – 12 = –8

10 Пресметнете $a - b + c$, ако:

а) $a = -1{,}1$; $b = -3{,}4$; $c = -5$; б) $a = 6{,}8$; $b = 4{,}2$; $c = -4{,}6$.

Решение:

а) $a = -1{,}1 - (-3{,}4) + (-5) = -1{,}1 + 3{,}4 - 5 = 2{,}3 - 5 = -2{,}7$

НАМИРАНЕ НА НЕИЗВЕСТНО СЪБИРАЕМО

1) Самолет лети на височина 5000 m, после се издига с 1200 m, след което се спуска на височина 3600 m. Каква е разликата във височината преди и след спускането на самолета?

Решение: Нека означим търсената разлика във височината с x. Тогава от условието имаме $5000 + 1200 - x = 3600$, или $6200 - x = 3600$. Понеже при рационалните числа изваждането е обратно действие на събирането, то $6200 = 3600 + x$, или $x = 6200 - 3600 = 2600$. Следователно самолетът се е снижил с 2600 m.

Когато към двете страни на равенството $A = B$ прибавим едно и също число, получаваме също вярно числово равенство, т.е. ако $A = B$, то за всяко число c равенството $A + c = B + c$ също е вярно.

Ако прехвърлим събираемо от алгебричен сбор от едната страна на равенство в другата, сменяме знака му с противоположния. Събираемото изчезва от едната страна на равенството, а в другата се появява ново събираемо – противоположното на изчезналото (към двете страни на равенството прибавяме противоположното му число):

ако $a + b = c + d$, то $a = -b + c + d$, $a + b - c = d$, $a + b - c - d = 0$ и т.н.

2) Вярно ли е, че ако:

а) $x + 4,9 = 7$, то $x = 7 - 4,9$; б) $6,1 + x = 0,4$, то $x = 0,4 + 6,1$;

в) $x - 3\frac{1}{2} = 6$, то $x = 6 - 3\frac{1}{2}$; г) $x - 7,9 = 56$, то $x = 56 + 7,9$;

д) $12 - x = 7,5$, то $-x = 7,5 - 12$; е) $13,5 - x = 6,5$, то $x = 13,5 - 6,5$?

Може да намерим неизвестно число x в равенство, като го оставим от едната страна на равенството, а известните числа a и b прехвърлим от другата страна с противоположни знаци:

ако $x + b = a$, то $x = a - b$;

ако $x - b = a$, то $x = a + b$;

ако $b - x = a$, то $-x = a - b$, или $x = b - a$.

3) Намерете x, ако:

а) $x - 12 = -3$; б) $-9 + x = 6$;

в) $10 + x = -20$; г) $x - 21 = -5$;

д) $x + (-11) = 8$; е) $60 - x = -20$.

Решение:

а) $x = -3 + 12$, $x = 9$;

б) $x = 6 + 9$, $x = 15$;

в) $x = -20 - 10$, $x = -30$;

г) $x = -5 + 21$, $x = 16$;

д) $x - 11 = 8$, $x = 8 + 11$, $x = 19$;

е) $-x = -20 - 60$, $-x = -80$, $x = 80$ или $60 = -20 + x$, $60 + 20 = x$, $x = 80$

4) Намерете неизвестното число.

а) $x - 0,88 = 1 - 1,8$ б) $-12,3 + x = 17,2 - 8$

в) $x - 2,1 + 4 = 0$ г) $x - 6,7 = 7,8 + 4$

д) $x - 0,3 - 0,8 = -1,2$ е) $x + (-4,2) - (-7,3) = 4$

ж) $7,6 + (-5,2) = x - 2,4$ з) $-6 - x = -4 + 7$

и) $-2,3 = 0,4 - x + 1,2$ й) $4\frac{1}{2} - z - 4 = 6,5 - 7$

к) $4,9 + y = 7,9 - 8$ л) $-16 + x + 16 = 19 - 10$

м) $a + 0,4 = -7 + 0,4$ н) $6\frac{1}{3} + 6 + x = 7\frac{2}{3} - 7\frac{2}{3}$

5) Магазин за мебели отчита касата си всяка седмица в петък вечер. Във вторник в касата имало 1756 лв. В сряда продали мебели за 1024 лв. В четвъртък имало продажби за 564 лв., но поради рекламация върнали 2000 лв. на клиент. Петъчните продажби били за 650 лв. Вечерта продавачът Спиро взел за себе си известна сума (аванс за месеца), оставил в магазина 234 лв. и отчел на собственика 1500 лв. Каква сума е взел за себе си Спиро?

Решение: Нека означим с y аванса на Спиро. В петък вечер общата сума, с която той е разполагал, е $1756 + 1024 + 564 - 2000 + 650$. Тези пари са разпределени по следния начин: $y + 234 + 1500$, т.е. имаме
$1756 + 1024 + 564 - 2000 + 650 = y + 234 + 1500$, или
$y = 1756 + 1024 + 564 - 2000 + 650 - 234 - 1500 = 260$ лв.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА. СВОЙСТВА НА УМНОЖЕНИЕТО И ДЕЛЕНИЕТО

При умножение на две рационални числа първо умножаваме модулите на множителите. След това пред полученото произведение записваме знак „+“, ако множителите са с еднакви знаци, и знак „–“, ако те са с различни знаци:

$$a \,.\, b = +|a| . |b|, \text{ когато } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0;$$
$$a \,.\, b = +|a| . |b|, \text{ когато } a \leq 0 \text{ и } b \leq 0;$$
$$a \,.\, b = -|a| . |b|, \text{ когато } a \geq 0 \text{ и } b \leq 0;$$
$$a \,.\, b = -|a| . |b|, \text{ когато } a \leq 0 \text{ и } b \geq 0.$$

В множеството на рационалните числа определяме делението като обратно действие на умножението, т.е. при $b \neq 0$ от $a : b = c$ следва $a = b \,.\, c$.

При деление на две рационални числа a и $b \neq 0$ първо разделяме модула на делимото a с модула на делителя $b \neq 0$. След това пред полученото произведение записваме знак „+“, ако делимото и делителят са с еднакви знаци, и знак „–“, ако те са с различни знаци:

$$a : b = +|a| : |b|, \text{ когато } a \geq 0 \text{ и } b > 0;$$
$$a : b = +|a| : |b|, \text{ когато } a \leq 0 \text{ и } b < 0;$$
$$a : b = -|a| : |b|, \text{ когато } a \geq 0 \text{ и } b < 0;$$
$$a : b = -|a| : |b|, \text{ когато } a \leq 0 \text{ и } b > 0.$$

Знака на произведението и частното може да запомните с таблицата:

Знак на *a*	**Знак на *b***	**Знак на *a . b* (*a : b*)**
+	+	+
–	–	+
+	–	–
–	+	–

За по-лесно запомняне на тези правила може вместо „+“ да кажем „приятел“, а вместо „–“ – „враг“. Тогава правилата от таблицата изглеждат така:

„Приятелят на моя приятел е мой приятел“; *„Врагът на моя враг е мой приятел“*; *„Приятелят на моя враг е мой враг“* и *„Врагът на моя приятел е мой враг“*.

Тъй като умножението и делението на рационални дроби свеждаме до действие с модулите им, които са положителни числа или нула, умножението и делението може да извършваме по познатите ни правила за действия с положителни дроби.

1 Определете знака на $a \,.\, b$ и на $a : b$, ако:

а) $a = -7$, $b = 4{,}5$; б) $a = 8$, $b = -0{,}2$;
в) $a = -1{,}6$, $b = -4{,}3$; г) $a = 4{,}8$, $b = -0{,}5$.

2 Пресметнете.

а) $(-4) \,.\, (-5)$ б) $(-8) : 2$
в) $(-1{,}5) : 3$ г) $(-0{,}65) \,.\, 0{,}4$

За всяко рационално число a са верни равенствата:

$$0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0;\ 1 \,.\, a = a \,.\, 1 = a;\ (-1) \,.\, a = a \,.\, (-1) = -a,$$

т.е. при умножение на число с –1 сменяме знака на числото и получаваме противоположното му число.

3 Пресметнете.

а) $6{,}8 \,.\, 0$ б) $7{,}9 \,.\, 1$ в) $3{,}24 \,.\, (-1)$
г) $1 \,.\, (-40{,}3)$ д) $(-2{,}4) \,.\, (-1)$ е) $0 \,.\, (-1)$

За умножението на рационалните числа са верни свойствата:

$\boldsymbol{a \,.\, b = b \,.\, a}$ – разместително;
$\boldsymbol{(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)}$ – съдружително;
$\boldsymbol{(a \pm b) \,.\, c = a \,.\, c \pm b \,.\, c}$ – разпределително.

Например: $3 \,.\, 5 = 5 \,.\, 3$; $(3 \,.\, 2) \,.\, 5 = 3 \,.\, (2 \,.\, 5)$.

Ако $c \neq 0$, при деление имаме:

$\boldsymbol{(a \pm b) : c = a : c \pm b : c}$ – разпределително свойство;
$\boldsymbol{(a \,.\, b) : c = (a : c) \,.\, b}$ – деление на произведение.

В сила е **основно свойство на дробите**: ако умножим или разделим числителя и знаменателя на дроб с число, различно от нула, стойността на дробта не се променя, т.е. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \,.\, c}{b \,.\, c} = \dfrac{a : c}{b : c}$, при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

Например: $\dfrac{4}{6} = \dfrac{4 \,.\, 5}{6 \,.\, 5} = \dfrac{4 : 2}{6 : 2}$.

Като прилагаме разместителното и съдружителното свойство, може да умножаваме повече от две рационални числа с разместване и групиране по подходящ начин.

$$\boldsymbol{a \,.\, b \,.\, c = (a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, c) \,.\, b}$$

Например: 10 . 5 . 0,1 = (10 . 5) . 0,1 = 10 . (5 . 0,1) = (10 . 0,1) . 5.

Минуса пред един множител може да запишем пред друг, както и пред произведението. Може и да изпускаме скоби.

$$\boldsymbol{(-a) \,.\, b = a \,.\, (-b) = -(a \,.\, b) = -a \,.\, b}$$

Например: (–2) . 7 = 2 . (–7) = –(2 . 7) = –2 . 7.

Същото се отнася и за делението.

$$\boldsymbol{(-a) : b = a : (-b) = -(a : b) = -a : b}$$

Например: (–0,4) : 2 = 0,4 : (–2) = –(0,4 : 2) = –0,4 : 2.

Делението на число, различно от нула, е умножение по реципрочното му число, т.е. за действията умножение и деление можем да мислим като за едно действие (умножение).

$$\boldsymbol{a : b = a \,.\, \frac{1}{b}}, \text{ ако } b \neq 0$$

Например: $0{,}15 : 3 = 0{,}15 \,.\, \frac{1}{3}$.

Когато отрицателните множители в едно произведение са четен брой, произведението е положително число, а когато са нечетен брой, произведението е отрицателно число.

Например: (–2) . (–3) . (–1) . (–7) = 42, (–2) . (–3) . (–7) = –42.

4 Пресметнете.

а) (–1) . (–2) . (–3) . (–4) б) 2 : (–5) . 4 . (–15) : (–2)

За да определим реда на извършване на действията в изразите, използваме скоби. Първо извършваме действията в скобите, след това – действията умножение и/или деление, а накрая – събиране и/или изваждане.

Когато по разпределителното свойство заменяме израза $(a+b)\,.\,c$ с израза $a\,.\,c+b\,.\,c$, казваме, че **разкриваме скоби**, а когато заменяме израза $a\,.\,c+b\,.\,c$ с израза $(a+b)\,.\,c$, казваме, че **изнасяме общ множител извън (пред или зад) скоби**.

Когато записваме $+(a+b)=a+b$ и $-(a+b)=-a-b$, също казваме, че разкриваме скоби. При разкриване на скоби, пред които стои знак „+“, знаците на събираемите **не се променят**, а при разкриване на скоби, пред които стои знак „–“, знаците на събираемите се **променят** с противоположните.

Например: +(–7 + 5) = –7 + 5, –(–7 + 5) = 7 – 5.

5 Вярно ли са разкрити скобите?

а) –2 . (5 + 7) = –10 – 14 б) (7 – 8) . (–3) = –21 – 24

в) 6 . (–4 – 12) = –24 – 72 г) (–7 + 5 – 8) . (–2) = –14 – 10 – 16

6 Пресметнете и сравнете.

а) –2 . (–3) и – 3 . (–2)

б) 6 . (–2 . 5) и (6 . (–2)) . 5

в) (1,2 – 0,6) . 5 и 1,2 . 5 – 0,6 . 5

г) (6,5 + 1,5) : 4 и 6,5 : 4 + 1,5 : 4

7 Пресметнете.

а) 5 . 24 – (6 + 5 . 24) б) –(28 – 49) . 2 + 51

в) 3. (–3 + 1) – 24 г) 6,8 – (5,3 + 3,4)

д) (–0,5 . 3,1 – 8) . (–2) + 2 е) –10 . (–7,5 + 2,5) – 50

8 Пресметнете.

а) (–5,5 + 4,3) . 6 б) (2,3 – 2,95) . (–0,4)

в) –0,4 . (–0,5 – 0,125) г) 0,1 . (2,7 – 7,2)

9 Изнесете:

а) общ положителен множител от:
4 . 5 + 8 . 4; –5 . 6 + 11 . 5; 7 – 13 . 7; –9 + 10 . 9;

б) общ отрицателен множител от:
–12 . 11 – 7 . 11; –9 . 12 + 5 . 9; 6 – 19 . 6.

10 По време на туристически поход ученици вървели със скорост 3 km/h. Какво разстояние са изминали за 2 h, 3 h, 4 h и 5 h?

НАМИРАНЕ НА НЕИЗВЕСТЕН МНОЖИТЕЛ

1 Фирма произвежда стъклени аквариуми с формата на правоъгълен паралелепипед, които имат обем 120 L.

а) Каква е височината на аквариума, ако за дъното му се използват 24 dm^2 стъкло?

б) Колко аквариума може да се наредят (без да стърчат) върху маса с дължина 2 m и ширина 45 cm, ако ширината на един аквариум е 40 cm?

Упътване. 1 L = 1 dm^3.

Решение: Нека широчината на аквариума е x dm, дължината е y dm, а височината е z dm. Тогава обемът на паралелепипеда е $V = x \,.\, y \,.\, z = 120$ dm^3.

а) Тъй като размерите на дъното са x dm и y dm, лицето на дъното е $S = x \,.\, y = 24$ dm^3.

Така за обема имаме $120 = V = x \,.\, y \,.\, z = S \,.\, z = 24 \,.\, z$, т.е. неизвестното z трябва да определим от равенството $120 = 24 \,.\, z$.

Понеже действието деление е обратно на умножението, то $z = 120 : 24 = 5$, т.е. височината на аквариума е 5 dm.

б) По условие $x = 4$ dm, а от подточка а) имаме $S = 4 \,.\, y = 24$ dm^2. Неизвестното число y ще определим от $4 \,.\, y = 24$. Действието деление е обратно на умножението, т.е. $y = 24 : 4 = 6$ dm, или размерите на дъното на аквариума са 4 dm и 6 dm.

Понеже ширината на масата (4,5 dm) е по-голяма от $x = 4$ dm и по-малка от $y = 6$ dm, трябва да разположим аквариумите върху нея по дължина.

Нека n е броят на аквариумите (n е естествено число), които се събират върху масата по дължина.

Тогава n пъти по дължината на аквариума $y = 6$ dm трябва да е по-малко или равно на дължината на масата (20 dm), т.е. ще намерим n, за което $n \,.\, 6 = 20$, или $n = 20 : 6 = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$, и ще вземем цялата му част.

Следователно на масата може да се съберат най-много 3 аквариума.

Когато умножим двете страни на равенството $A = B$ с едно и също число, различно от нула, получаваме вярно числово равенство, т.е. ако $A = B$, за всяко число $c \neq 0$ равенството $c \,.\, A = c \,.\, B$ също е вярно.

Ненулев множител от произведение прехвърляме от едната страна на равенството в знаменателя на другата страна.

Множителят изчезва от едната страна на равенството, а в другата се появява нов множител – реципрочното число на прехвърления множител (двете страни на равенството умножаваме с реципрочното число на прехвърления множител).

Ако $a \,.\, b = c \,.\, d$, то $a = \frac{c \,.\, d}{b}$, $\frac{a \,.\, b}{c} = d$, $\frac{a \,.\, b}{c \,.\, d} = 1$ и т.н.

2 Вярно ли е, че, ако:

а) $x \,.\, 3{,}5 = 7$, то $x = 7 : 3{,}5$;

б) $6{,}4 \,.\, x = 0{,}4$, то $x = 0{,}4 \,.\, 6{,}4$;

в) $x : 3\frac{1}{2} = 6$, то $x = 6 : 3\frac{1}{2}$;

г) $x : 7 = 56$, то $x = 56 \,.\, 7$;

д) $12 : x = 7{,}5$, то $1 : x = 7{,}5 : 12$;

е) $13 : x = 6{,}5$, то $x = 13 : 6{,}5$?

Може да намерим неизвестно число x, което участва като множител в равенство, като го оставим от едната страна на равенството, а известните множители прехвърлим в другата страна, но в знаменателя:

ако $a = x \,.\, b$, то $x = a : b$ $\left(x = \frac{a}{b}\right)$, при $b \neq 0$;

ако $x : b = a$ $\left(\frac{x}{b} = a\right)$, то $x = a \,.\, b$, при $b \neq 0$;

ако $a : x = b$ $\left(\frac{a}{x} = b\right)$, то $a = x \,.\, b$, или $x = a : b$ $\left(x = \frac{a}{b}\right)$, при $b \neq 0$.

3 Намерете x, ако:

а) $x : 12 = \frac{1}{3}$;

б) $\frac{1}{9} \,.\, x = 6$;

в) $(-10) \,.\, x = 20$;

г) $-20 \,.\, x = -5$;

д) $\frac{x}{12} = 8$;

е) $\frac{60}{x} = -20$.

Решение:

а) $x = \frac{1}{3} \cdot 12,$
$x = 4;$

б) $x = 6 : \frac{1}{9} = 6 \cdot 9,$
$x = 54;$

в) $x = 20 : (-10),$
$x = -2;$

г) $x = (-5) : (-20),$
$x = \frac{1}{4};$

д) $x = 12 \cdot 8,$
$x = 96;$

е) $\frac{1}{x} = -20 : 60,$
$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}, x = -3$ или
$60 = -20 \cdot x, 60 : (-20) = x, x = -3$

4 Намерете неизвестното число.

а) $x \cdot 0,8 = (1 - 1,8) \cdot 5$
б) $-4,6 \cdot x = (17,2 - 8) : 4$
в) $x : 2 = 1$
г) $x : 6,7 = 7,6 + 4,2$
д) $x \cdot (-0,4) + 0,8 = -1,2$
е) $a \cdot 2\frac{1}{4} + (-4,2) - (-13,2) = 0$
ж) $7,6 + (-5,2) = x : 2,4$
з) $-6 \cdot b = -4 + 7$
и) $-2,3 = 0,5 \cdot y + 1,2$
й) $4\frac{1}{2} : z - 4 = 6,5 - 7$
к) $-4,9 : y = 7,9 - 3$
л) $(-16 \cdot t) : 16 = 19 : 10$
м) $a \cdot 0,4 = (-7 + 3) \cdot 0,4$
н) $6\frac{1}{3} + 6 \cdot c = 7\frac{2}{3} - 10\frac{2}{3}$

Решение:

а) $x \cdot 0,8 = (-0,8) \cdot 5$
$x = -4 : 0,8$
$x = -5;$

б) $-4,6 \cdot x = 9,2 : 4$
$-4,6 \cdot x = 2,3$
$x = 2,3 : (-4,6)$
$x = -0,5;$

в) $x : 2 = 1$
$x = 1 \cdot 2$
$x = 2;$

г) $x : 6,7 = 7,6 + 4,2$
$x : 6,7 = 11,8$
$x = 11,8 \cdot 6,7$
$x = 79,06;$

д) $x \cdot (-0,4) + 0,8 = -1,2$
$x \cdot (-0,4) = -1,2 - 0,8$
$x \cdot (-0,4) = -2$
$x = -2 : (-0,4)$
$x = 5$

5 Колко е x, ако $-0,05 \cdot x = 1,29 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,29$?

а) -10 б) 0 в) 1 г) 10

6 Колко е x, ако $0,35 \cdot x = -4,29 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,09$?

а) $-8,4$ б) $-2,4$ в) $-0,84$ г) $-0,24$

7 Колко е x, ако $(-x) : 2\frac{1}{2} = -3\frac{3}{7}$?

а) -8 б) -7 в) 7 г) 8

8 Намерете неизвестното x, ако $1,2 \cdot x + 0,8 \cdot x - 1 = 5,3$.

Решение: $1,2 \cdot x + 0,8 \cdot x - 1 = 5,3$
$x \cdot (1,2 + 0,8) = 5,3 + 1$
$x \cdot 2 = 6,3$
$x = 6,3 : 2$
$x = 3,15$

9 Намерете x, ако:

а) $-9,8 \cdot x = 24,5;$
б) $0,37 \cdot (-x) = 1 + 0,48;$
в) $x : \left(-1\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{6} - 0;$
г) $-x : \left(-\frac{7}{2}\right) = -2\frac{1}{3};$
д) $0,1 : x = -10;$
е) $-2 \cdot x - 4,2 = 4 \cdot 2,1;$
ж) $3 \cdot (2x - 0,3) = 3 \cdot (-0,5).$

10 Ако $-2\frac{1}{5} : (-x) = -1\frac{2}{3} : \frac{5}{3}$, на колко е равно x?

а) $-2\frac{1}{5}$
б) $2\frac{1}{5}$
в) $2\frac{2}{5}$
г) $\frac{5}{11}$

ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА СИСТЕМА. КООРДИНАТИ НА ТОЧКА

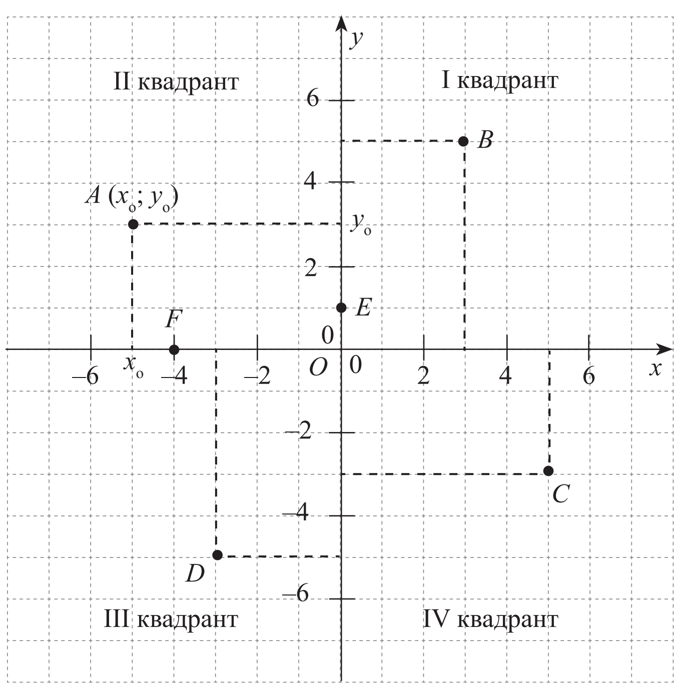
За да можем да определим мястото на даден обект спрямо избрани ориентири, използваме така наречените **координати**. В зависимост от това къде се намира обектът, можем да имаме една, две или повече координати, които може да отбелязваме с числа и/или букви.

В равнината такива ориентири може да бъдат две пресичащи се числови оси (обикновено избираме перпендикулярни оси с равни единични отсечки).

Две перпендикулярни числови оси с общо начало ***O*** образуват **декартова координатна система *Oxy***.

Обикновено означаваме осите с Ox и Oy и ги наричаме **координатни оси**, а точката O – **начало** на координатната система. Оста Ox наричаме **абсцисна ос**, а оста Oy – **ординатна ос**.

Координатните оси разделят равнината на четири части, наречени **квадранти**.



Мястото на точката A спрямо координатна система Oxy определяме така:

Първо спускаме перпендикуляр от точката A към оста Ox (права през точката A, успоредна на Oy) и намираме числото x_0, което се изобразява в пресечната им точка. След това спускаме перпендикуляр от точката A към оста Oy (права през точката A, успоредна на Ox) и намираме числото y_0, което се изобразява в пресечната им точка. Накрая записваме наредената двойка числа $(x_0; y_0)$, които наричаме **координати** на точката A (x_0 – първа координата, или **абсциса**, y_0 – втора координата, или **ордината**).

1 Запишете координатите (абсцисата и ординатата) на точките от чертежа.

Решение:

Точка	Координати	Абсциса	Ордината
A	(–5; 3)	–5	3
B	(3; 5)	3	5
C	(5; –3)	5	–3
D	(–3; –5)	–3	–5
E	(0; 1)	0	1
F	(–4; 0)	–4	0

Точката с координати $(x; y)$:
е върху оста Ox, когато $y = 0$;
е върху оста Oy, когато $x = 0$;
е в I квадрант, когато $x \geq 0$ и $y \geq 0$;
е във II квадрант, когато $x \leq 0$ и $y \geq 0$;
е в III квадрант, когато $x \leq 0$ и $y \leq 0$;
е в IV квадрант, когато $x \geq 0$ и $y \leq 0$.

2 Спрямо дадена координатна система (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) отбележете точката:

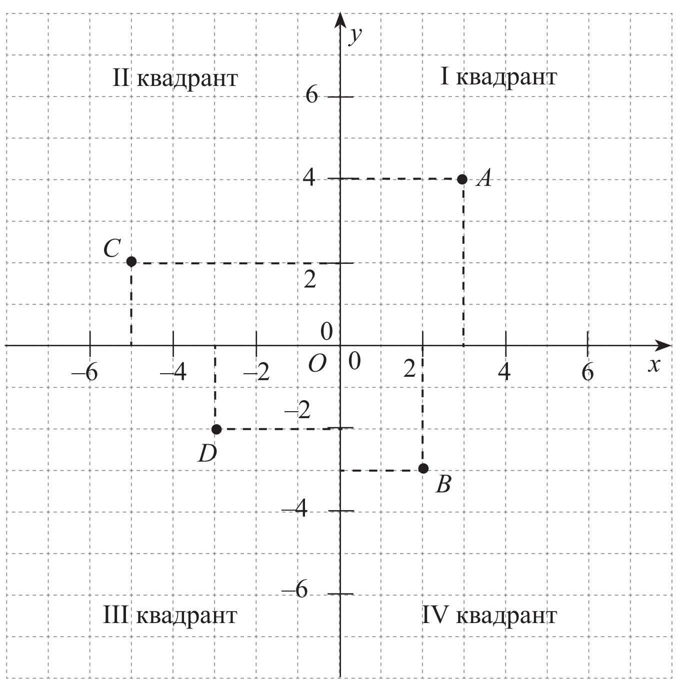
а) A (3; 4); б) B (2; –3); в) C (–5;2); г) D (–3; –2).

В кой квадрант е всяка от точките?

Решение: Решаваме обратната задача на тази за намиране на координатите на точка спрямо дадена координатна система.

а) Точката A има абсциса 3, следователно е на перпендикуляра към оста Ox, построен през образа на числото 3 върху Ox. Ординатата на A е 4, затова A е на перпендикуляра към оста Oy, построен през образа на числото 4 върху Oy. A е пресечната точка на построените перпендикуляри. Точката A е в I квадрант.

г) Точката D е пресечната точка на перпендикуляра към оста Ox, построен през образа на числото –3 върху оста Ox и на перпендикуляра към оста Oy, построен през образа на числото –2 върху оста Oy. Точката D е в III квадрант.



Построяването на точка по дадени координати $(x; y)$ става по следния начин: Първо построяваме перпендикуляр към оста Ox през образа на числото x. След това построяваме перпендикуляр към оста Oy през образа на числото y. Накрая намираме пресечната точка на двата перпендикуляра.

3 Спрямо дадена координатна система (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) постройте точките: A (5; 3), B (–3; –1), C (0; –4), D (6; 0), E (3; –1), F (–5; 3). В кой квадрант е всяка от тях?

4 Постройте права през началото O и точката N (–4; 3). Върху нея означете точката с абсциса –3 и намерете ординатата ѝ.

5 Начертайте координатна система Oxy (дължините на единичните отсечки по двете оси да са равни на 1 cm), права a през точки M (1; 2) и N (3; 4). Намерете координатите на:

а) пресечните точки A и B на правата a с координатните оси;

б) средата P на отсечката MN.

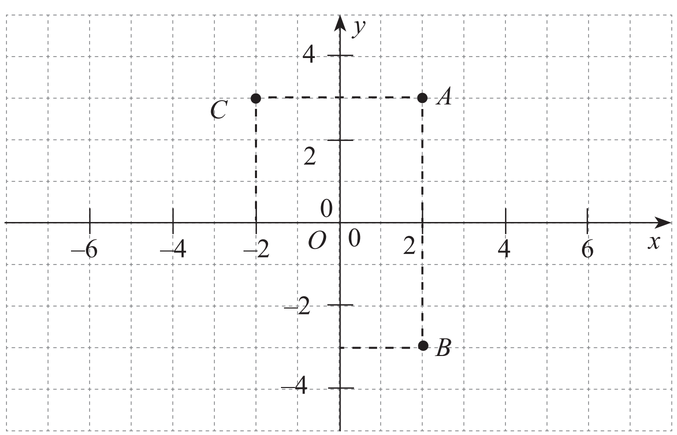
ПОСТРОЯВАНЕ НА СИМЕТРИЧНИ ТОЧКИ НА ДАДЕНА ТОЧКА СПРЯМО НАЧАЛОТО И ОСИТЕ НА КООРДИНАТНАТА СИСТЕМА

1 Спрямо дадена координатна система Oxy (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) постройте точките A (2; 3), B (2; –3) и C (–2;3). Намерете разстоянията от точките:

а) A и B до абсцисната ос;

б) A и C до ординатната ос.

Решение: а) Очевидно точките A и B имат една и съща абсциса 2, а ординатите им са противоположни числа. Следователно те са на равни разстояния (3 cm) от оста ***Ox***, а правата AB е перпендикулярна на оста ***Ox***. За точките A и B се казва, че са **симетрични относно абсцисната ос *Ox***.



б) Точките A и C имат една и съща ордината 3, а абсцисите им са противоположни числа. Следователно те са на равни разстояния (2 cm) от оста ***Oy***, а правата AC е перпендикулярна на оста ***Oy***. За точките A и C се казва, че са **симетрични относно ординатната ос *Oy***.

*Казваме, че точките A и B са **симетрични** спрямо **абсцисната ос Ox**, когато имат равни абсциси, а ординатите им са противоположни числа, т.е. A (p; q), B (p; –q).*

*Казваме, че точките A и C са **симетрични** спрямо **ординатната ос Oy**, когато имат равни ординати, а абсцисите им са противоположни числа, т.е. A (p; q), C (–p; q).*

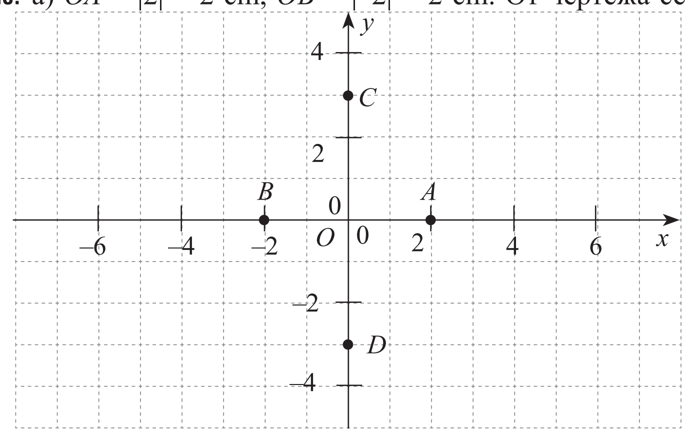
2 Кои от точките A (7; –2), B (–7; –2), P (3; 6), M (3; –6), N (–3; –6), Q (7; 2) са симетрични относно Ox и кои – относно Oy?

Решение: Относно Ox симетрични са A и Q, P и M, а относно Oy са симетрични точките A и B, M и N.

3 В правоъгълна координатна система Oxy (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) постройте точките A (2; 0), B (–2; 0), C (0; 3) и D (0; –3). Намерете дължините на отсечките:

а) OA, OB; б) OC, OD.

Решение: а) $OA = |2| = 2$ cm, $OB = |-2| = 2$ cm. От чертежа се вижда, че



началото O на координатната система е среда на отсечката AB.

*Казваме, че точките A и B са **симетрични относно началото O.***

б) $OC = |3| = 3$ cm, $OD = |-3| = 3$ cm. От чертежа се вижда, че началото O на координатната система е среда на отсечката CD, т.е. точките C и D също са **симетрични относно началото *O***.

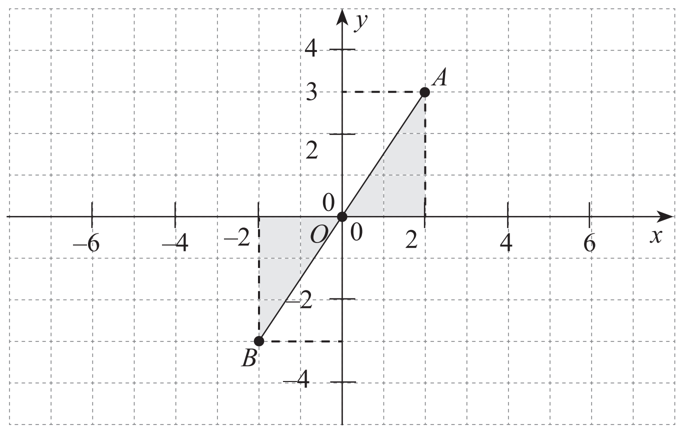
4 Постройте точките, симетрични на A (4; –3) спрямо:

а) оста Ox; б) оста Oy.

Определете в кои квадранти се намират дадената точка и построените симетрични на нея точки.

5 В правоъгълна координатна система Oxy (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) постройте точките A (2; 3) и B (–2; –3). Каква е точка O за отсечката AB?

Решение: Върху абсцисната ос изобразяваме абсцисите 2 и –2 съответно на точките *A* и *B* и издигаме перпендикуляри към абсцисната ос. Върху ординатната ос изобразяваме ординатите 3 и –3 съответно на точките *A* и *B* и издигаме перпендикуляри към ординатната ос. Определяме пресечната точка на съответните перпендикуляри и получаваме точките *A* и *B*.



От чертежа се вижда, че получихме два правоъгълни триъгълника, които имат съответно равни катети. Ако положим тези триъгълници един върху друг, те ще съвпаднат, което означава, че *OA* = *OB*, т.е. *O* е среда на отсечката *AB*. В този случай казваме, че точката *B* е симетрична на точката *A* **относно началото *O***.

Казваме, че две точки *A* и *B* са ***симетрични относно началото O*** *на координатна система, когато както абсцисите им, така и ординатите им са противоположни числа, т.е. A (p; q), B (–p; –q).*

6 В правоъгълна координатна система *Oxy* (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) постройте точката *A* (–2; 3) и симетричната ѝ точка относно началото ***O***. Означете тази точка с *B* и след това постройте симетричната на *B* относно оста ***Oy***.

ДЕЙСТВИЕ СТЕПЕНУВАНЕ С ЕСТЕСТВЕН СТЕПЕНЕН ПОКАЗАТЕЛ. ЧИСЛОВИ ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ СТЕПЕНИ

Вместо събиране на равни рационални числа извършваме умножение на числото по броя на събираемите. Подобен опростен запис може да въведем и за произведение на няколко равни рационални числа.

Умножение на даден брой равни множители наричаме **степенуване**.

Произведението на няколко равни множителя $\underbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{n \text{ пъти}}$ записваме

кратко така: a^n

Степенен показател:
броят n на множителите

Степен:
четем „a на степен n“
или „a на n-та степен“

Основа на степента:
множителят a

Степенният показател е естествено число и затова наричаме степента **степен с естествен степенен показател**.

1 Запишете като степени произведенията.

а) 4 . 4 . 4 б) 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7
в) 12 . 12 . 12 . 12 г) 0,3 . 0,3 . 0,3 . 0,3
д) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ е) 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1

За всяка степен кажете устно основата ѝ и степенния ѝ показател.

Решение: а) $4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 4^3$ – четем „четири на трета степен“ или „четири на трета“.

2 Запишете като произведение на равни множители и след това – като степен, числата.

а) 32 б) 81 в) 100
г) 125 д) 144 е) 10 000

3 Запишете:

а) 64 като степен с основа: 8, 4 и 2;
б) 81 като степен с основа: 9 и 3.

4 Запишете произведението като степен.

а) 6 . 36 б) 4 . 8
в) 2 . 16 . 32 г) 25 . 125

5 Проверете верни ли са равенствата.

а) $2^2 = 9 - 3$ б) $3^2 = 5 \,.\, 5 - 16$
в) $3^3 - 0 = 3 \,.\, (4 \,.\, 2 + 2)$ г) $3^2 = 3 \,.\, (4 - 1)$
д) $0{,}216 : (0{,}6^3) = 0{,}36 : 0{,}6$ е) $5^2 \,.\, 5 = 5^3$

6 За обяд в столовата на едно училище предлагат три вида супи – зеленчукова, пилешка и телешка; три вида основно ястие – мусака, печено пиле и свинска скара, и три вида десерт – компот, торта и крем-карамел. Учениците от 6.ᵃ клас отишли на обяд и всеки си избрал различна комбинация от ястия. Колко най-много може да са учениците от този клас?

Решение: Всяко дете може да избере супа по 3 начина. За всяка от супите има по 3 възможности за основно ястие. Значи, едно дете може да избере супа и основно ястие по 3 . 3 различни начина. За всяка от тези комбинации има по 3 възможности за избор на десерт. Следователно различните комбинации от ястия са $3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 3^3 = 27$. Получихме, че в класа учат най-много 27 ученици.

7 За дванадесетия рожден ден на племенницата си Звезделина чичо Страхил от Америка ѝ подари 2 лв. Той ѝ обеща, че ще удвоява тази сума за всеки следващ рожден ден. Гостите казаха, че чичото е скъперник, а Звезделина възкликна: „Чудесно, на двадесет и първия си рожден ден ще получа повече от 1000 лв., а на 31 години със сигурност ще бъда милионерка!“. Кой според вас е прав – Звезделина или гостите ѝ?

8 Лист хартия бил сгъван на две през средата, след това пак на две през средата и т.н., докато сгъването било възможно.

а) Колко пласта е имало след първото, второто и третото сгъване?
б) Колко пласта ще се получат, ако листът може да се сгъне 10 пъти? Каква ще бъде дебелината на хартията след десетото сгъване, ако листът е дебел 0,1 mm?

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ НА СТЕПЕНИ С РАВНИ ОСНОВИ

Понеже $a^n \,.\, a^m = \underbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{n \text{ пъти}} \,.\, \underbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{m \text{ пъти}} = \underbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{n+m \text{ пъти}} = a^{n+m}$, при умножение на степени с равни основи получаваме степен със същата основа и със степенен показател сбора от степенните показатели на отделните множители:

$a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$, където n и m са естествени числа.

Степени с равни основи умножаваме, като събираме степенните им показатели.

1 Запишете като степен произведението.

а) $3^3 \,.\, 3^5$ б) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 \,.\, \left(\frac{1}{5}\right)^7$ в) $a^4 \,.\, a^3$

г) $x^3 \,.\, x^3$ д) $11^9 \,.\, 11^{11}$ е) $x \,.\, x^6$

2 Намерете основата a, ако:

а) $a^7 = 3^4 \,.\, 3^3$;   б) $a^{10} = 5^2 \,.\, 5^3 \,.\, 5^5$.

Решение: а) Понеже $a^7 = 3^4 . 3^3 = 3^7$, то $a = 3$.

3 Намерете пропуснатото число.

а) $2^3 \,.\, 2^* = 2^8$ б) $*^4 \,.\, 3^5 = 3^9$

в) $* \,.\, 9^4 = 9^5$ г) $7^8 \,.\, * = 7^{10}$

4 Сравнете изразите.

а) $3^2 \,.\, 3^7$ и $3^4 \,.\, 3^5$ б) $10^3 \,.\, 10^9$ и $10^2 \,.\, 10^{10}$

5 Като използвате правилото за умножение на две степени, сравнете:

а) $(2^2 \,.\, 2^3) \,.\, 2^4$ и $2^2 \,.\, (2^3 \,.\, 2^4)$;   б) $(5^2 \,.\, 5^3) \,.\, 5^2$ и $5^2 \,.\, (5^3 \,.\, 5^2)$.

Тъй като умножението и събирането притежават съдружителното свойство, то

$\left(a^n \,.\, a^m\right) \,.\, a^k = a^n \,.\, \left(a^m \,.\, a^k\right) = a^n \,.\, a^m \,.\, a^k = a^{n+m} \,.\, a^k = a^n \,.\, a^{m+k} = a^{n+m+k}$.

Понеже

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}^{n-m \text{ пъти}} \,.\, \overbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}^{m \text{ пъти}}}{\underbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{m \text{ пъти}}} = \underbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{n-m \text{ пъти}} = a^{n-m},$$

при $a \neq 0$, при деление на степени с равни основи получаваме степен със същата основа и със степенен показател разликата от степенните показатели на отделните множители:

$a^n : a^m = a^{n-m}$, където $n > m$ са естествени числа.

Степени с равни основи делим, като изваждаме степенните им показатели.

Аналогично при $n < m$ имаме $a^n : a^m = \dfrac{1}{a^{m-n}}$, а при $m = n$ – $a^n : a^n = 1$.

Тъй като действията умножение и деление притежават разпределителното свойство, то: $\left(a^n \pm a^m\right) \,.\, a^k = a^n \,.\, a^k \pm a^m \,.\, a^k = a^{n+k} \pm a^{m+k}$;

$\left(a^n \pm a^m\right) : a^k = a^n : a^k \pm a^m : a^k = a^{n-k} \pm a^{m-k}$.

6 Намерете степенния показател n, ако:

а) $(2^7 : 2^3) : 2^2 = 2^n$;   б) $(3^{10} : 3^3) : 3^4 = 3^n$;   в) $5^{12} : (5^7 : 5^3) = 5^n$.

7 Пресметнете.

а) $(2^3 + 2^4) : 2^2$ б) $(12 – 6) : 6$ в) $(12^5 – 6^5) : 6^4$

Решение: а) $(2^3 + 2^4) : 2^2 = 2^3 : 2^2 + 2^4 : 2^2 = 2 + 2^2 = 6$

8 Пресметнете.

а) $2^2 + 2^2$ б) $5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4$

в) $3^3 + 3^3 + 3^3$ г) $4 \,.\, 7^6 + 3 \,.\, 7^6$

Решение: а) $2^2 + 2^2 = 2 \,.\, 2^2 = 2^3$;   б) $5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 = 5 \,.\, 5^4 = 5^5$;

в) $3^3 + 3^3 + 3^3 = 3 \,.\, 3^3 = 3^4$;   г) $4 \,.\, 7^6 + 3 \,.\, 7^6 = (4 + 3) \,.\, 7^6 = 7 \,.\, 7^6 = 7^7$

9 Запишете като степен произведението.

а) $2 \,.\, 2^2 \,.\, 8$ б) $5 \,.\, 25 \,.\, 125$ в) $9 \,.\, 27 \,.\, 81$

Решение: а) Понеже $2 = 2^1$ и $8 = 2^3$, то $2 \,.\, 2^2 \,.\, 8 = 2^1 \,.\, 2^2 \,.\, 2^3 = 2^{1+2+3} = 2^6$.

СТЕПЕНУВАНЕ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Ако n е естествено число, то:

$$(a\,.\,b)^n = \underbrace{(a\,.\,b)\,.\,(a\,.\,b)\,.\,\ldots\,.\,(a\,.\,b)}_{n \text{ пъти}} = \underbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{n \text{ пъти}}\,.\,\underbrace{b\,.\,b\,.\,\ldots\,.\,b}_{n \text{ пъти}} = a^n\,.\,b^n,$$

или степен на произведение на две числа е произведението на степените на двете числа със същия степенен показател:

$$\boldsymbol{(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n}.$$

Произведение степенуваме, като степенуваме всеки от множителите.

Последната формула може да прилагаме по различен начин, като в зависимост от задачата може да заместваме както $(a\,.\,b)^n$ с $a^n\,.\,b^n$, така и $a^n\,.\,b^n$ с $(a\,.\,b)^n$.

1 Пресметнете и сравнете.
а) $2^2\,.\,3^2$ и $(2\,.\,3)^2$
б) $2^3\,.\,5^3$ и $(2\,.\,5)^3$

Решение:
а) $2^2\,.\,3^2 = 4\,.\,9 = 36$; $(2\,.\,3)^2 = 6^2 = 36$, т.е. $2^2\,.\,3^2 = (2\,.\,3)^2$;
б) $2^3\,.\,5^3 = 8\,.\,125 = 1000$: $(2\,.\,5)^3 = 10^3 = 1000$, т.е. $2^3\,.\,5^3 = (2\,.\,5)^3$.

2 Запишете като произведение на две степени степента.
а) $(5\,.\,8)^n$ б) $(0{,}3\,.\,0{,}2)^8$
в) $(3{,}9\,.\,7)^{33}$ г) $(2a)^5$

3 Кой е пропуснатият степенен показател?
а) $(2\,.\,7)^5 = 2^5\,.\,7^*$ б) $\left(\frac{1}{4}\,.\,\frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{1}{4}\right)^*\,.\,\left(\frac{1}{5}\right)^6$
в) $(9\,.\,0{,}7)^3 = 9^3\,.\,0{,}7^*$ г) $\left(\frac{2}{3}\,.\,0{,}4\right)^* = \left(\frac{2}{3}\right)^4\,.\,(0{,}4)^4$
д) $(3\,.\,0{,}25)^{10} = 3^*\,.\,(0{,}25)^*$ е) $8^2\,.\,5^2 = 40^*$

Действието умножение притежава разместителното и съдружителното свойство:

$$(a\,.\,b\,.\,c)^n = ((a\,.\,b)\,.\,c)^n = (a\,.\,b)^n\,.\,c^n = a^n\,.\,b^n\,.\,c^n,$$

т.е. получихме, че можем да степенуваме повече числа по същия начин.

Степен на произведение на няколко числа е произведението на степените на числата със същия степенен показател.

В зависимост от конкретната цел може да пишем скоби, където е необходимо, и да заместваме всеки от изразите $(a\,.\,b\,.\,c)^n$, $((a\,.\,b)\,.\,c)^n$, $(a\,.\,b)^n\,.\,c^n$ или $a^n\,.\,b^n\,.\,c^n$ с някой от останалите.

4 Запишете като степен произведението.
а) $2^3\,.\,7^3$ б) $11^7\,.\,13^7$ в) $5^8\,.\,12^8\,.\,16^8$

5 Пресметнете.
а) $0{,}5^6\,.\,2^6$ б) $0{,}4^8\,.\,0{,}5^8\,.\,5^8$
в) $2\,.\,(2^2+3) - \left(\frac{3}{2}\right)^3\,.\,\left(\frac{4}{3}\right)^3$ г) $3^4\,.\,2^3\,.\,5^2 - 17\,.\,30^2 + 1000$
д) $0{,}2^3\,.\,0{,}5^3 + 5^2\,.\,2^2$

6 Вярно ли е?
а) $(3\,.\,5\,.\,7)^2 = 3\,.\,5\,.\,7^2$ б) $(4\,.\,2\,.\,3)^5 = 4^5\,.\,6^5$
в) $(2\,.\,9)^3\,.\,4^3 = (2\,.\,4)^3\,.\,9^3$ г) $(15\,.\,20)^6 = 25^6\,.\,12^6$
д) $\left(\frac{5}{7}\right)^4\,.\,\left(\frac{7}{5}\right)^4 = 1$ е) $\left(2\frac{1}{3}\right)^5\,.\,\left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{10}{7}\right)^5$
ж) $2^3 + 2^3 = 2^4$ з) $3^4 + 3^4 + 3^4 = 3^5$
и) $2^3\,.\,3^2 = 6^6$ й) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\,.\,\left(\frac{1}{3}\right)^3\,.\,12^3 = 8$

СТЕПЕНУВАНЕ НА ЧАСТНО И СТЕПЕН

При $b \neq 0$ и n – естествено число:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ пъти}} = \frac{\overbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}^{n \text{ пъти}}}{\underbrace{b \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, b}_{n \text{ пъти}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Степен на частно на две числа е частното на степените на двете числа със същия степенен показател.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

1 Кое число е пропуснато?

а) $(9:7)^3 = 9^3 \,.\, 7^*$ б) $5^7 \,.\, 6^7 = (5 \,.\, 6)^*$ в) $11^* : 13^6 = (11 : 13)^6$

2 Запишете като частно на степени.

а) $\left(\frac{2}{7}\right)^8$ б) $\left(\frac{3}{17}\right)^7$ в) $\left(\frac{11}{19}\right)^{101}$

г) $\left(\frac{4 \,.\, a}{5 \,.\, b}\right)^5$ д) $\left(\frac{17 \,.\, x}{51 \,.\, y}\right)^2$ е) $\left(\frac{2 \,.\, x \,.\, y}{5 \,.\, a \,.\, b}\right)^3$

3 Запишете всяко частно като степен със степенен показател 2.

а) $\frac{25}{49}$ б) $\frac{100 \,.\, 36}{49 \,.\, 121}$ в) $\frac{9 \,.\, 16}{64 \,.\, 25}$

г) $\frac{a^2 \,.\, b^2}{4 \,.\, c^2}$ д) $\frac{9 \,.\, 81}{4 \,.\, 16}$ е) $\frac{25 \,.\, 64}{81 \,.\, 49}$

4 Запишете като степен със степенен показател 3.

а) $\frac{8}{27}$ б) $\frac{1}{64}$ в) $\frac{125}{216}$

За естествените числа n и m имаме

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n \,.\, a^n \,.\, \ldots \,.\, a^n}_{m \text{ пъти}} = a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m \text{ пъти}}} = a^{n \,.\, m}.$$

При степенуване на степен получаваме степен със същата основа и със степенен показател произведението на двата степенни показатели.

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \,.\, m}$$

5 Запишете като степен.

а) $\left(5^2\right)^5$ б) $\left(0{,}2^2\right)^4 (0{,}2^2)^4$ в) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^5$

6 Представете степента като степен с основа 3.

а) 9^3 б) 27^{10} в) 81^5 г) 243^6

7 Запишете като степен с основа 10 числата: 1000^3, 100^5, $10\,000^2$, $100\,000^5$.

8 Подредете по големина числата $(2^2)^{10}$, $(2^3)^8$, $(2^2)^3$, $(2^4)^3$ и $(2^2)^2$, като започнете от най-малкото.

9 Запишете като степен изразите:
$x \,.\, (3^2 \,.\, x^3)^3 \,.\, (9 \,.\, x^5)^2$ и $(125 \,.\, a^6)^2 : (25 \,.\, a)^3$.

10 Пресметнете стойността на израза $(3 \,.\, x^2 \,.\, y)^3 : (81 \,.\, x^4 \,.\, y^{10})$ за $x = 2$ и $y = \frac{1}{3}$.

11 Намерете неизвестния степенен показател в равенството

$$15^6 = 9^3 \,.\, 5^x.$$

12 Пресметнете $(6 - 1{,}5 \,.\, 2)^2 + (5^3)^3 : 5^7$.

СТЕПЕНУВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

Да припомним, че произведението на няколко равни рационални множителя $\underbrace{a\,.\,a\,.\,...\,.\,a}_{n\text{ пъти}}$ записваме накратко като a^n, където степенният показател n е естествено число.

Примерите, които разгледахме досега, бяха само за степени с неотрицателна основа. Ако основата на степента е отрицателно число, в сила е познатото правило:

Когато отрицателните множители в едно произведение са четен брой, произведението е положително число, а когато отрицателните множители са нечетен брой, произведението е отрицателно число.

Понеже броят на множителите зависи от степенния показател, имаме следните свойства:

$(-a)^n = a^n$, когато $n = 2k$ е четно число;

$(-a)^n = -a^n$, когато $n = 2k+1$ е нечетно число.

1 Представете като:

а) степен: $-6\,.\,(-6)\,.\,(-6)\,.\,(-6)$; $-0{,}3\,.\,(-0{,}3)$; $-\frac{6}{7}\,.\left(-\frac{6}{7}\right).\left(-\frac{6}{7}\right)$;

б) произведение: $(-1)^3$; $(-4{,}5)^5$; $\left(-3\frac{2}{3}\right)^2$.

2 Пресметнете.

а) $(-5)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; $0{,}2^3$; 0^5; $(-0{,}3)^2$; $(-1)^7$

б) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{3}{-4}\right)^2$, $\left(\frac{10}{15}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$, $\left(\frac{-3}{-4}\right)^2$, $\left(\frac{-3}{4}\right)^2$

3 Запишете като степен с положителна и степен с отрицателна основа числата.

а) 16, 36, 49, 121 б) –27, –64, –125

СТЕПЕН С НУЛЕВ ПОКАЗАТЕЛ И СТЕПЕН С ЦЯЛ ПОКАЗАТЕЛ

Ще определим степен с показател нула и с цяло отрицателно число така, че да са изпълнени свойствата на степените.

Имаме $1 = a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$, където a е различно от 0 рационално число, т.е. може да определим $a^0 = 1$, при $a \neq 0$ (0^0 не може да се определи).

Така $a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$, за $a \neq 0$, т.е. може да определим $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, при $a \neq 0$ (0^{-n} не може да се определи).

Така, ако a и b са рационални числа, различни от нула, а m и n са цели числа:

$$(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\quad \left(a^n\right)^m = a^{n.m},\quad a^n\,.\,a^m = a^{n+m},$$

$$\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\quad \left(\frac{1}{b}\right)^{-n} = b^n.$$

1 Пресметнете, като предварително посочите основата и степенния показател:

а) 1^{-3}, 6^2, 3^{-3}, $(0{,}5)^{-4}$, 5^0;

б) $(-4)^3$, $(-2)^{-2}$, $(-0{,}5)^2$, $(-3)^{-3}$, $(-7)^0$.

2 Представете като степен.

а) $(-8)^3\,.\,(-8)^5$, $(-1{,}1)^6\,.\,(-1{,}1)^{-5}$, $\left(6\frac{1}{5}\right)^{-3}.\left(6\frac{1}{5}\right)^{-1}$

б) $(-2)^3 : (-2)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}.\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $(-9{,}3)^{-5} : (-9{,}3)^{-1}$

3 Вярно ли е, че:

а) $4 = 4^{-1}$; б) $-2^3 = (-2)^3$; в) $(-1{,}2)^6 = 1{,}2^6$?

НАМИРАНЕ НА ЧИСЛЕНА СТОЙНОСТ НА ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ СТЕПЕНИ

Когато пресмятаме стойността на израз, за да определим реда на извършване на действията, използваме скоби. Първо извършваме действията в скобите, след това – действията степенуване (пресмятаме степенните показатели и основите на степените и извършваме степенуването), умножение и/или деление, а накрая – събиране и/или изваждане.

1 Пресметнете.

а) $6^2 - 2 . 5 + 1$ б) $3^{2 . 5 - 7} : 9 - 3$

в) $3 . 5^2 + 32 : 4^2 - 2$ г) $(4 - 3{,}5)^2 + (1 + 0{,}5)^2$

Решение: а) $6^2 - 2 . 5 + 1 = 6 . 6 - 2 . 5 + 1 = 36 - 10 + 1 = 27$

б) $3^{2 . 5 - 7} : 9 - 3 = 3^3 : 3^2 - 3 = 3 - 3 = 0$

в) $3 . 5^2 + 32 : 4^2 - 2 = 3 . 25 + 32 : 16 - 2 = 75 + 2 - 2 = 75$

г) $(4 - 3{,}5)^2 + (1 + 0{,}5)^2 = 0{,}5^2 + 1{,}5^2 = 0{,}25 + 2{,}25 = 2{,}5$

Като използваме свойствата на действията, може да променяме реда им, за да ги извършаме по-бързо: може да разместваме множители и събираеми, може да групираме (използваме свойствата на действията с рационални числа – съдружителното, разместителното, разпределителното и др., като използваме скоби), може да съкращаваме (използваме свойствата $a . \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = a : a = 1$, при $a \neq 0$), може да унищожаваме (използваме свойствата $a + (-a) = -a + a = 0$) и т.н.

2 Пресметнете.

а) $20 . 3^2 - 5 . 3^3 + 1$ б) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}$ в) $\frac{49}{7^2 + 6 . 7^2}$

Решение: а) $20 . 3^2 - 5 . 3^3 + 1 = 4 . 5 . 3^2 - 5 . 3 . 3^2 + 1 = (4 - 3) . 5 . 3^2 + 1$
$= 1 . 5 . 9 + 1 = 45 + 1 = 46$

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2-3} - \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

в) $\frac{49}{7^2 + 6 . 7^2} = \frac{7^2}{(1+6) . 7^2} = \frac{1}{7}$

РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА. УПРАЖНЕНИЕ

1 Кое е вярно?

а) Рационални числа са само отрицателните числа.
б) Рационални числа са само положителните числа.
в) Рационални числа са положителните и отрицателните числа.
г) Рационални числа са неотрицателните числа и техните противоположни.

2 Кое е вярно?

а) Противоположните числа се различават по модул.
б) Противоположните числа се различават само по знак.
в) Противоположните числа се различават по модул и по знак.
г) Никое от горните не е вярно.

3 Кое число се изобразява най-наляво върху числовата ос?

а) $-0{,}01$ б) $-0{,}001$ в) $0{,}01$ г) $0{,}001$

4 Коя е стойността на израза $5^2 - 5 . 3$?

а) 5 б) –5 в) –10 г) 10

5 Ако a е най-голямото цяло отрицателно число, а b е най-голямото цяло двуцифрено число, колко е $(a - b) : 10$?

а) 9,8 б) 10 в) –9,8 г) –10

6 Коя е стойността на израза $3\frac{3}{4} - \left(3{,}5 - \frac{1}{2} + 0{,}75\right)$?

а) 0 б) –1 в) 8,5 г) 6

7 Колко е x, ако $-0{,}05 . x = 1{,}29 . 0{,}5 - 0{,}5 . 0{,}29$?

а) 0 б) 1 в) –10 г) 10

8 Коя е стойността на израза $-0{,}1^2 . 10^2 + (-0{,}1)^2 . 10^2 - 3^{-1} . (-2)^0$?

а) $-\frac{1}{3}$ б) $1\frac{1}{3}$ в) 5 г) 3

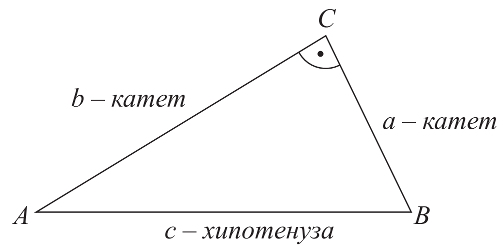
9 Коя степен е равна на $2^{(-3)^2}$?

а) 2^{-6} б) 2^9 в) 2^{-9} г) 2^6

МАТЕМАТИКА 6. КЛАС

ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА – ПРИЛОЖЕНИЕ НА СТЕПЕНИТЕ

Да си припомним елементите на правоъгълния триъгълник: хипотенуза – страната срещу правия ъгъл, това е страна с най-голяма дължина; другите две страни наричаме катети.



(1) Даден е правоъгълен триъгълник с катети a и b и хипотенуза c. Намерете квадратите на катетите и квадрата на хипотенузата. Сравнете сбора на квадратите на катетите ($a^2 + b^2$) с квадрата на хипотенузата (c^2), ако:

а) $a = 1{,}8$ cm; $b = 2{,}4$ cm; $c = 3$ cm;
б) $a = 12$ cm; $b = 5$ cm; $c = 13$ cm;
в) $a = 1{,}5$ cm; $b = 2$ cm; $c = 2{,}5$ cm;
г) $a = 8$ cm; $b = 15$ cm; $c = 17$ cm.

Решение: За по-нагледно резултатите от всички пресмятания ще представим със следната таблица:

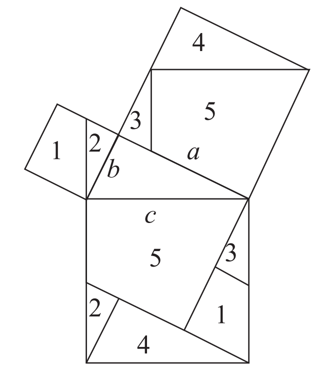
a	**b**	**c**	**a^2**	**b^2**	**$a^2 + b^2$**	**c^2**
1,8	2,4	3	3,24	5,76	9	9
12	5	13	144	25	169	169
1,5	2	2,5	2,25	4	6,25	6,25
8	15	17	64	225	289	289

Изводът, който правим от тези пресмятания, е, че $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.
Това равенство в математиката е известно, като **Питагорова теорема**.

Във всеки правоъгълен триъгълник сборът от квадратите на катетите е равен на квадрата на хипотенузата.

Теоремата носи името на древногръцкия философ и математик Питагор (570 – 495 г. пр. Хр.), на когото традицията приписва нейното откриване и доказване, въпреки че тя, изглежда, е известна дълго преди това. Съществуват свидетелства, че още математиците във Вавилон разбират тази зависимост.

Ето един чертеж на доказателство, известно като доказателство на ***Нилсен.***



(2) Даден е правоъгълният ΔABC ($\sphericalangle ACB = 90°$). Намерете:

а) AB, ако $BC = 4$ cm, $AC = 3$ cm;
б) AC, ако $BC = 8$ cm, $AB = 10$ cm;
в) BC, ако $AC = 24$ cm, $AB = 26$ cm;
г) BC, ако $AC = 16$ cm, $AB = 2$ dm.

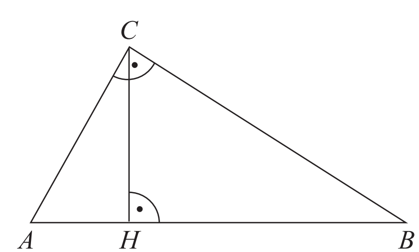
Решение: Тъй като $\sphericalangle ACB = 90°$, то хипотенузата на този триъгълник е AB, а катетите са BC и AC. Тогава от Питагоровата теорема следва, че:

а) $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AB = 5$ cm.
б) Заместваме в $AB^2 = BC^2 + AC^2$ и получаваме $10^2 = 8^2 + AC^2$
$\Rightarrow 100 = 64 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow AC = 6$ cm.
в) Отново заместваме в $AB^2 = BC^2 + AC^2$ и получаваме $26^2 = BC^2 + 24^2$
$\Rightarrow 676 = BC^2 + 576 \Rightarrow BC^2 = 676 - 576 = 100 \Rightarrow BC = 10$ cm.
г) Първо превръщаме в едни и същи мерни единици (в cm) страните: $AB = 2$ dm $= 20$ cm, и заместваме в $AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow 20^2 = BC^2 + 16^2$
$\Rightarrow 400 = BC^2 + 256 \Rightarrow BC^2 = 400 - 256 = 144 \Rightarrow BC = 12$ cm.

(3) Даден е правоъгълният ΔABC ($\sphericalangle ACB = 90°$). Намерете хипотенузата AB и височината към нея CH, ако $BC = 20$ cm и $AC = 15$ cm.

Решение: От Питагоровата теорема намираме хипотенузата:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow AB = 25 \text{ cm}.$$

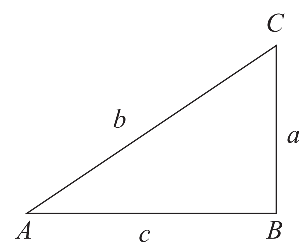


Сега прилагаме формулите за лице на правоъгълен триъгълник.

$$S=\frac{BC\ .\ AC}{2}=\frac{20\ .\ 15}{2}=150\ \text{cm}^2,\ \text{но}\ S=\frac{AB\ .\ CH}{2}\Rightarrow 150=\frac{25\ .\ CH}{2}\Rightarrow$$

$12{,}5\ .\ CH = 150 \Rightarrow CH = 150 : 12{,}5 = 12$ cm.

(4) Даден е правоъгълният ΔABC с катети $AB = 4$ dm и $BC = 9$ cm. Намерете обиколката и лицето на триъгълника.



Решение: $AB = 4$ dm $= 40$ cm. За да намерим обиколката на триъгълника, ни трябва дължината на хипотенузата. Прилагаме Питагоровата теорема за ΔABC и намираме хипотенузата:

$AC^2 = BC^2 + AB^2 = 9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681 \Rightarrow AB = 41$ cm.

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 40 + 9 + 41 = 90$ cm.

Сега прилагаме формулата за лице на правоъгълен триъгълник:

$$S=\frac{BC\ .\ AB}{2}=\frac{9\ .\ 40}{2}=190\ \text{cm}^2.$$

ЧИСЛОВИ РАВЕНСТВА. СВОЙСТВА

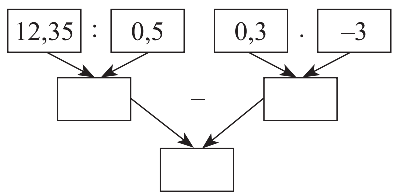
(1) Соня купила 2 kg домати по 2,25 лв. и 1 kg краставици по 1,80 лв. Ако за покупката е платила с банкнота от 10 лв., запишете с числов израз колко лева са ѝ върнали, и намерете неговата стойност.

Решение: $10 - (2 \,.\, 2{,}25 + 1{,}80) = 10 - (4{,}5 + 1{,}8) = 10 - 6{,}3 = 3{,}7$

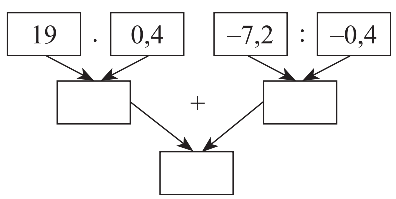
Числото, което се получава при извършване на действията в числов израз $\boldsymbol{u}$, се нарича (числена) ***стойност*** на израза $\boldsymbol{u}$.

(2) Запишете числовите изрази от схемите и ги пресметнете. Какво забелязвате за техните стойности?

а)



б)



Решение:

а) $(12{,}35 : 0{,}5) - (0{,}3 \,.\, (-3)) = 24{,}7 - (-0{,}9) = 24{,}7 + 0{,}9 = 25{,}6$;

б) $(19 \,.\, 0{,}4) + (-7{,}2 : (-0{,}4)) = 7{,}6 + 18 = 25{,}6$.

Получихме равни стойности за двата числови израза.

Когато стойностите на изразите $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ са равни, се казва, че равенството $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ е вярно.

Когато стойностите на изразите $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ не са равни, се казва, че равенството $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ не е вярно, или се записва $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$.

(3) Проверете равни ли са стойностите на изразите u и v, ако:

а) $u = (8{,}8 - 6) : (-7)$ и $v = -0{,}04 \,.\, 10$;

б) $u = -7{,}5 - 0{,}2 \,.\, 5$ и $v = 0{,}85 \,.\, 10$.

Решение: а) $u = (8{,}8 - 6) : (-7) = 2{,}8 : (-7) = -0{,}4$; $v = -0{,}04 \,.\, 10 = -0{,}4$. Получихме, че числовите изрази са равни, т.е. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

б) $u = -7{,}5 - 0{,}2 \,.\, 5 = -7{,}5 - 1 = -8{,}5$; $v = 0{,}85 \,.\, 10 = 8{,}5$. Получихме, че числовите изрази не са равни, т.е. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$.

Верните числови равенства имат следните **основни свойства**:

- $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ – **рефлексивност**, т.е. всеки израз е равен на себе си;
- **ако** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, **то** $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ – **симетричност**, т.е. ако един израз е равен на друг, то и вторият е равен на първия;
- **ако** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ **и** $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, **то** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$ – **транзитивност**, т.е. ако два израза поотделно са равни на трети, то те са равни и помежду си.

Като се приложат правилата за действия с изрази, може да се докажат и следните свойства на верните равенства:

- ако $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, то $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, т.е. ако към равни изрази се прибави или от тях се извади един и същ израз, се получават пак равни изрази.

  Примери: $2^4 = 16$ е вярно равенство $\Rightarrow 2^4 + 3 \,.\, 2 = 16 + 3 \,.\, 2$ $(22 = 22)$

  $2^4 = 16$ е вярно равенство $\Rightarrow 2^4 - 3 \,.\, 2 = 16 - 3 \,.\, 2$ $(10 = 10)$.

- ако $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$, то $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, т.е. ако израз от едната страна на вярно равенство се прехвърли в другата страна с противоположен знак, се получава пак вярно равенство.

Пример: $16 : 8 + 4 = 6$ е вярно равенство. Изваждаме 4 от двете страни на равенството и получаваме $16 : 8 + 4 - 4 = 6 - 4 \Rightarrow 16 : 8 = 6 - 4$ $(2 = 2)$.

- ако $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$ е число, различно от 0, то $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u} : \boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} : \boldsymbol{a}$, т.е. ако двете страни на равни изрази се умножат или разделят с едно и също число (различно от нула), се получават пак равни изрази.

  Примери: $-7 \,.\, 2 = 8 - 26$ е вярно равенство. Следователно:

  $(-7 \,.\, 2) \,.\, 0{,}5 = (8 - 26) \,.\, 0{,}5$ $(-7 = -7)$;

  $(-7 \,.\, 2) : (-0{,}7) = (8 - 26) \,.\, (-0{,}7)$ $(20 = 20)$.

- ако $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{t}$, то $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{t}$ (почленно събиране).
- ако $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{t}$, то $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{t}$ (почленно изваждане).

Примери: $26 - 48 : 3 = 10$ и $12 \,.\, 0{,}5 = 6$ са верни равенства. Следователно:

$(26 - 48 : 3) + 12 \,.\, 0{,}5 = 10 + 6$ $(16 = 16)$;

$(26 - 48 : 3) - 12 \,.\, 0{,}5 = 10 - 6$ $(4 = 4)$.

УРАВНЕНИЕ ОТ ВИДА $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$). ПРАВИЛА ЗА РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЕ

① Проверете вярно ли е равенството $2 \cdot x + 1 = 7$ при x, равно на:
а) –1 б) 1,5 в) 2 г) 3

Решение: В равенството заместваме x с дадената стойност.

а) $x = -1$	б) $x = 1{,}5$	в) $x = 2$	г) $x = 3$
$2 \cdot (-1) + 1 = 7$	$2 \cdot 1{,}5 + 1 = 7$	$2 \cdot 2 + 1 = 7$	$2 \cdot 3 + 1 = 7$
$-2 + 1 = 7$	$3 + 1 = 7$	$4 + 1 = 7$	$6 + 1 = 7$
$-1 \neq 7$	$4 \neq 7$	$5 \neq 7$	$7 = 7$

Следователно равенството $2 \cdot x + 1 = 7$ не е вярно при $x = -1$; $x = 1{,}5$; $x = 2$ и е вярно при $x = 3$.

Равенство на изрази с една променлива, което е изпълнено само за някои стойности на променливата, се нарича уравнение с една променлива или **уравнение с едно неизвестно**.

② Уравнение с една променлива ли е равенството:
а) $6 \cdot 7 - 1{,}5 \cdot 2 = 39$; б) $2 \cdot y - 5 = 8 \cdot y + 7$; в) $2 \cdot x - 8 \cdot y = 12$?

Когато в уравнение заместим променливата x с конкретно число, в зависимост от стойността на променливата можем да получим или вярно, или невярно числово равенство.

Например: Ако в уравнението $x + 2 = 2 \cdot x + 1$ заместим x с 1, ще получим: $1 + 2 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 3 = 3$, т.е. получаваме вярно числово равенство (казва се, че **$x = 1$ е корен** на уравнението $x + 2 = 2 \cdot x + 1$).

Ако заместим x с –2, ще получим: $(-2) + 2 = 2 \cdot (-2) + 1$; $0 = -3$, т.е. получаваме невярно числово равенство (казва се, че $x = -2$ не е корен на уравнението).

Корен (решение) на уравнение с едно неизвестно се нарича такава стойност на променливата, за която, като заместим в уравнението, се получава вярно числово равенство.

③ Корен ли е числото 2 на уравнението:
а) $3 \cdot (x - 1) + 1 = 2 \cdot x$; б) $x - 3 \cdot x = 1$?

Решение: а) $3 \cdot (2 - 1) + 1 = 2 \cdot 2 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 1 = 4 \Rightarrow 3 + 1 = 4 \Rightarrow 4 = 4$. Получаваме вярно числово равенство, т.е. $x = 2$ е корен на уравнението.
б) $2 - 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow 2 - 6 = 1 \Rightarrow -4 = 1$ е невярно числово равенство, т.е. $x = 2$ не е корен на уравнението.

Уравнение от вида $a \cdot x + b = 0$, където $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са рационални числа и $\boldsymbol{a \neq 0}$, а $\boldsymbol{x}$ е променлива, се нарича **линейно уравнение с едно неизвестно** или още **уравнение от първа степен с едно неизвестно**.

Тук неизвестното $\boldsymbol{x}$ е от първа степен, $\boldsymbol{a}$ е коефициентът пред неизвестното и се нарича **старши коефициент**, а **$\boldsymbol{b}$ – свободен член**.

④ Определете устно старшия коефициент и свободния член на уравненията:
а) $2 \cdot x - 7 = 0$; б) $1{,}4 \cdot x + 2 = 0$;
в) $x - 12 = 0$; г) $2{,}3 \cdot x + 4{,}6 = 0$.

⑤ Съставете уравнение от първа степен с едно неизвестно, на което старшият коефициент е равен $\frac{(-3)^4}{3^3}$, а свободният член е 12, и проверете дали –4 е корен на това уравнение.

Решение: $a = \frac{(-3)^4}{3^3} = \frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3$. Тогава уравнението е $3 \cdot x + 12 = 0$.

Заместваме x с –4 и получаваме $3 \cdot (-4) + 12 = 0 \Rightarrow -12 + 12 = 0$
$\Rightarrow 0 = 0$ е вярно числово равенство, т.е. $x = -4$ е корен на уравнението, което съставихме.

⑥ С проверка установете кое от числата 0; 2 и $\frac{1}{3}$ е корен на уравнението $3 \cdot x - 1 = 0$.

⑦ Намерете корените на уравнението.
а) $x + 4 = 0$ б) $3 \cdot x = 12$ в) $-0{,}5 \cdot x = 1{,}5$

Решение: а) $x + 4 = 0$ – намираме неизвестното събираемо $x = 0 - 4$ или $x = -4$, т.е. уравнението има един корен $x = -4$.

За другите две уравнения ще намерим неизвестен множител, като използваме свойството на равенството и разделим двете страни на уравнението с коефициента пред x, т.е. със старшия коефициент.

б) $3 \cdot x = 12 \mid : 3$ – делим на 3.

$\frac{3 \cdot x}{3} = \frac{12}{3}$ – обикновено този запис се пропуска и се пише само

$x = 12 : 3$; $x = 4$.

в) $-0{,}5 \cdot x = 1{,}5 \mid : (-0{,}5)$

$x = 1{,}5 : (-0{,}5)$

$x = -3$

Да се **реши едно уравнение**, означава да се намерят всичките му корени или да се установи, че то няма корени.

Правила за решаване на уравнения

Коренът на едно уравнение не се променя, ако:

- израз от едната страна на уравнение се **прехвърли** в другата му страна с **противоположен знак**;
- двете страни на уравнение се **умножат (разделят)** с едно и също, **различно от нула** число;
- израз в уравнение се замести с израз, равен на него.

Използвайки тези правила, можем да обобщим:

Уравнение от вида $\boldsymbol{a \,.\, x + b = 0}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$ винаги има единствено решение, което намираме по следния начин:

$a \,.\, x + b = 0$

$a \,.\, x = -b \mid : a \neq 0$

$x = -\dfrac{b}{a}$

8 Намерете корените на уравнението:

а) $4 \,.\, x + 60 = 0$; б) $-10 \,.\, x - 8 = 0$;

в) $\dfrac{1}{2} \,.\, x - 4 = 0$; г) $2 \,.\, x - 0{,}5 = 7{,}5$;

д) $2 \,.\, x + 3 \,.\, x + 20 = 0$ ` е) $3 \,.\, (x + 1) = 9$.

Решение: Прехвърляме 60 в дясната страна с противоположен знак, т.е.

а) $4 \,.\, x + 60 = 0$

$4 \,.\, x = -60 \mid : 4$

$x = -60 : 4$

$x = -15$

в) $0{,}5 \,.\, x - 4 = 0$

$0{,}5 \,.\, x = 4 \mid : 0{,}5$

$x = 4 : 0{,}5$

$x = 8$

$x = -12$

г) $2 \,.\, x - 0{,}5 = 7{,}5$

Прехвърляме $-0{,}5$ в дясната страна с противоположен знак, т.е.
$2 \,.\, x = 7{,}5 + 0{,}5$. Извършваме действието в дясната страна:
$2 \,.\, x = 8 \Rightarrow x = 8 : 2 \Rightarrow x = 4$.

д) От разпределителното свойство получаваме
$2 \,.\, x + 3 \,.\, x = (2 + 3) \,.\, x = 5 \,.\, x$.
Така получаваме уравнението $5 \,.\, x + 20 = 0 \Rightarrow 5 \,.\, x = -20$
$\Rightarrow x = -20 : 5 \Rightarrow x = -4$.

е) $3 \,.\, (x + 1) = 9$

Заместваме израза $3 \,.\, (x + 1)$ с $3 \,.\, x + 3$, прилагайки разпределителното свойство, и получаваме уравнението
$3 \,.\, x + 3 = 9 \Rightarrow 3 \,.\, x = 9 - 3 \Rightarrow 3 \,.\, x = 3 \Rightarrow x = 3 : 3 \Rightarrow x = 1$.

9 Решете уравнението.

а) $x - 1{,}5 = 0{,}5$ б) $5 \,.\, x - 4 \,.\, x = 6$ в) $3 \,.\, x = 2 \,.\, x - 6$

г) $2 \,.\, x + 1 = 2 + x$ д) $6 \,.\, x = 0$ е) $2 \,.\, (x + 1) = 2$

Решение: а) $x - 1{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow x = 1{,}5 + 0{,}5 \Rightarrow x = 2$

б) $5 \,.\, x - 4 \,.\, x = 6 \Rightarrow (5 - 4) \,.\, x = 6 \Rightarrow x = 6$

в) $3 \,.\, x = 2 \,.\, x - 6 \Rightarrow 3 \,.\, x - 2 \,.\, x = -6 \Rightarrow (3 - 2) \,.\, x = -6 \Rightarrow x = -6$

г) $2 \,.\, x + 1 = 2 + x \Rightarrow 2 \,.\, x - x = 2 - 1 \Rightarrow (2 - 1) \,.\, x = 1 \Rightarrow x = 1$

д) $6 \,.\, x = 0 \Rightarrow x = 0 : 6 \Rightarrow x = 0$

е) $2 \,.\, (x + 1) = 2 \Rightarrow 2 \,.\, x + 2 = 2 \Rightarrow 2 \,.\, x = 2 - 2 \Rightarrow 2 \,.\, x = 0$
$\Rightarrow x = 0 : 2 \Rightarrow x = 0$

10 Решете уравнението.

а) $2 - 4 \,.\, x = 18$ б) $x \,.\, (-0{,}5) + 3 = 4 - 2 \,.\, 1{,}5$

Решение:

а) $2 - 4 \,.\, x = 18 \Rightarrow -4 \,.\, x = 18 - 2 \Rightarrow -4 \,.\, x = 16 \Rightarrow x = 16 : (-4)$
$\Rightarrow x = -4$

б) $x \,.\, (-0{,}5) + 3 = 4 - 2 \,.\, 1{,}5 \Rightarrow x \,.\, (-0{,}5) + 3 = 4 - 3$
$\Rightarrow x \,.\, (-0{,}5) + 3 = 1 \Rightarrow x \,.\, (-0{,}5) = 1 - 3 \Rightarrow x \,.\, (-0{,}5) = -2$
$\Rightarrow x = -2 : (-0{,}5) \Rightarrow x = 4$

11 Решете уравнението.

а) $9 \,.\, x - 8 \,.\, x = 2$ б) $1 - x = 7{,}2$

в) $6{,}5 \,.\, x - 3 = 5{,}5 \,.\, x + 1$ г) $4 - 5 \,.\, x = x - 3$

д) $2 \,.\, (x + 1) = 6$ е) $3 \,.\, x + 2{,}5 = x + 0{,}1$

ж) $3 \,.\, x + 2 = 17$ з) $-x \,.\, (-3) + 21 = 0$

12 Решете уравнението.

а) $4 - 2 \,.\, x + 2x = x$ б) $4 \,.\, (x + 2) = 8$

в) $6 \,.\, (x - 2) = 3 \,.\, (x + 5)$ г) $4 \,.\, x - (2 \,.\, x + 1) = 2$

д) $4 \,.\, x - 2 \,.\, (3 - x) = 2$ е) $3 \,.\, x - (18 + 6 \,.\, x) = 6$

ж) $x - 1 = 2 \,.\, x + 5$ з) $5 - 3 \,.\, (x + 1) = 8 + x$

и) $3 \,.\, x - (x + 1) = -x - 2$

ОТНОШЕНИЕ. ПРОПОРЦИЯ. СВОЙСТВА НА ПРОПОРЦИИТЕ

(1) Баща е висок 184 cm и е на 30 години, а тригодишната му дъщеричка е висока 92 cm. Колко пъти бащата е по-възрастен от дъщеря си? Колко пъти бащата е по-висок от дъщеря си?

Решение: Бащата е 30 : 3 = 10 пъти по-възрастен от дъщеря си.
Бащата е 184 : 92 = 2 пъти по-висок от дъщеря си.

Частното на две числа $\boldsymbol{a : b}$, $\boldsymbol{(b \neq 0)}$ наричаме **отношение** на числата a и b. Записите $\boldsymbol{a : b}$ („a делено на b“) и $\boldsymbol{\dfrac{a}{b}}$ („a върху b“), четем още и „a се отнася към b“ или „a към b“.

(2) Луксозно издание на детска енциклопедия с цветни илюстрации и твърди корици е с цена 45 лв., а издание на същата книга с меки корици струва 15 лв.

а) Колко пъти луксозното издание е по-скъпо от обикновеното?
б) Запишете отношението на цената на обикновеното издание към цената на луксозното издание.

Решение: а) Луксозното издание е 45 : 15 = 3 пъти по-скъпо от обикновеното издание.
б) Отношението на цената на обикновеното издание към цената на луксозното издание е $\dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$.

Равенството на две отношения наричаме **пропорция**, т.е. пропорция е $\boldsymbol{a : b = c : d}$, където $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{b \neq 0}$, $\boldsymbol{c \neq 0}$ и $\boldsymbol{d \neq 0}$.

Четем: „***a*** се отнася към ***b***, както ***c*** към ***d*** “ или „***a*** към ***b***, както ***c*** към ***d*** “.

Числата ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** наричаме **членове на пропорцията**.

(3) Образуват ли пропорция отношенията?

а) $\dfrac{24}{32}$ и $\dfrac{15}{20}$ б) $5\dfrac{1}{2} : 16\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{5}{3} : 5$

Решение:
а) Отношението $\dfrac{24}{32}$ е съкратима обикновена дроб. След като съкратим на 8, получаваме $\dfrac{24}{32} = \dfrac{3}{4}$. Аналогично съкращаваме на 5 отношението $\dfrac{15}{20}$ и получаваме $\dfrac{3}{4}$, т.е. двете отношения са равни и следователно образуват пропорцията $\dfrac{24}{32} = \dfrac{15}{20}$.

б) Пресмятаме отношенията $5\dfrac{1}{2} : 16\dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{2} : \dfrac{33}{2} = \dfrac{11}{2} \cdot \dfrac{2}{33} = \dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{5}{3} : 5 = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{3}$. Двете отношения са равни и следователно образуват пропорция.

Всеки член на пропорция наричаме **четвърта пропорционална** на останалите три члена.

Основно свойство на пропорциите

Ако $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Правило за умножаване „накръст“ – $\dfrac{a}{b} \nearrow\!\!\!\swarrow \dfrac{c}{d}$

(4) Проверете верни ли са пропорциите.

а) $\dfrac{24}{40} = \dfrac{9}{15}$ б) $\dfrac{2}{4,5} = \dfrac{3}{6,75}$ в) $5,2 : 4 = 3,9 : 3$

(5) Може ли да съставим пропорция с отношенията?

а) $\dfrac{12}{15}$ и $\dfrac{8}{10}$ б) $0,9 : 3,6$ и $0,4 : 1,6$

в) $25 : 15$ и $6 : 10$ г) $\dfrac{120}{40}$ и $\dfrac{9}{3}$

(6) Намерете неизвестния член x в пропорцията.

а) $\dfrac{x}{15} = \dfrac{4}{5}$ б) $\dfrac{2,4}{x} = \dfrac{4}{7}$ в) $\dfrac{35}{7} = \dfrac{10}{x}$ г) $\dfrac{24}{30} = \dfrac{x}{5}$

Решение: а) Като умножим накръст членовете от пропорцията $\dfrac{x}{15} = \dfrac{4}{5}$, получаваме $5 \cdot x = 15 \cdot 4$, т.е. $5 \cdot x = 60$. Следователно $x = 60 : 5 = 12$.

Аналогично решаваме и останалите три примера.

$\frac{2,4}{x}=\frac{4}{7}$	$\frac{35}{7}=\frac{10}{x}$	$\frac{24}{30}=\frac{x}{5}$
$2,4\ .\ 7 = x\ .\ 4$	$35\ .\ x = 7\ .\ 10$	$24\ .\ 5 = 30\ .\ x$
$4\ .\ x = 16,8$	$35\ .\ x = 70$	$30\ .\ x = 120$
$x = 16,8 : 4$	$x = 70 : 35$	$x = 120 : 30$
$x = 4,2$	$x = 2$	$x = 4$

7 Намерете x, ако:

а) $\frac{x}{4}=\frac{15}{2}$; б) $\frac{36}{x}=\frac{4}{9}$; в) $\frac{66}{11}=\frac{12}{x}$; г) $\frac{54}{30}=\frac{x}{5}$.

Смяна на местата на членовете на пропорцията

Ако разменим по диагонал местата на членовете на една пропорция, отново получаваме пропорция.

От $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следва $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

Например:

а) $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$ и $\frac{15}{5}=\frac{12}{4}$; б) $\frac{5}{7}=\frac{2,5}{3,5}$ и $\frac{3,5}{7}=\frac{2,5}{5}$.

От $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следва $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Например:

а) $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$ и $\frac{4}{12}=\frac{5}{15}$; б) $\frac{5}{7}=\frac{2,5}{3,5}$ и $\frac{5}{2,5}=\frac{7}{3,5}$.

От $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следва $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

Например:

а) $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$ и $\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$; б) $\frac{5}{7}=\frac{2,5}{3,5}$ и $\frac{3,5}{2,5}=\frac{7}{5}$.

8 Запишете пропорцията, която се получава от пропорцията $\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$ с размяна на местата на членовете:

а) по диагонала „/“;

б) по диагонала „\“;

в) по двата диагонала.

9 Дадена е пропорцията $6 : 27 = 2 : 9$. Запишете пропорцията, която се получава след размяна на местата:

а) на крайните членове; б) на средните членове;

в) на крайните и на средните членове.

10 Използвайте равенството $17\ .\ 38 = 3,4\ .\ 190$, за да съставите пропорция. С помощта на свойствата на пропорциите съставете още три пропорции.

11 В бонбониера има 10 бонбона от натурален шоколад и 12 бонбона от млечен шоколад. Какво е отношението на бонбоните от натурален шоколад към бонбоните от млечен шоколад?

В друга бонбониера има 15 бонбона от натурален шоколад и 18 бонбона от млечен шоколад. Пропорционално ли е отношението на бонбоните от натурален шоколад към бонбоните от млечен шоколад в двете кутии?

Решение: В първата кутия отношението на бонбоните от натурален шоколад към бонбоните от млечен шоколад е $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$. Във втората кутия отношението е $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$. Следователно $\frac{10}{12}=\frac{15}{18}$, т.е. отношението на бонбоните от натурален шоколад към бонбоните от млечен шоколад в двете кутии е пропорционално.

Можем да проверим дали това отношение е пропорционално, и с основното свойство на пропорциите: $10\ .\ 18 = 180 = 15\ .\ 12$.

12 Кое от отношенията $\frac{3}{15}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{6}{25}$ и $\frac{4}{35}$ образува пропорция с отношението $24 : 100$?

13 Съставете отношението на:

а) 15 ст. към 1 лв.; б) 2 dm към 50 cm;

в) 15 min към 1 h; г) 2 години към 3 месеца.

Решение: а) 1 лв. = 100 ст. Тогава $\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$.

б) Тъй като 50 cm = 5 dm, отношението е $2 : 5$.

в) Тъй като 1 h = 60 min, отношението е $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$.

г) Тъй като 2 год. = $2\ .\ 12 = 24$ мес., отношението е $24 : 3 = 8 : 1$.

ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ. КОЕФИЦИЕНТ НА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ

1 За да тренира издръжливост, състезател по спортно ходене трябва да поддържа постоянна скорост. Затова той съставил таблицата:

Разстояние *S*	6 km	3 km	2 km	1 km
Време *t*	1 h	30 min	20 min	10 min

Колко километра трябва да измине състезателят по време на тренировката за:

а) 15 min; б) 45 min?

Решение: а) Целта на състезателя е да се движи с постоянна скорост. В таблицата виждаме, че $v = \dfrac{S}{t} = \dfrac{6\text{ km}}{60\text{ min}} = \dfrac{3\text{ km}}{30\text{ min}} = \dfrac{2\text{ km}}{20\text{ min}} = \dfrac{1\text{ km}}{10\text{ min}}$.

За 15 min разстоянието x km трябва да е такова, че

$\dfrac{6}{60} = \dfrac{3}{30} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = \dfrac{x}{15}$, т.е. $\dfrac{1}{10} = \dfrac{x}{15}$, откъдето $x = 1{,}5$.

б) Ако y km е разстоянието, което състезателят изминава за 45 min, то $\dfrac{6}{60} = \dfrac{3}{30} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = \dfrac{y}{45}$, т.е. $\dfrac{1}{10} = \dfrac{y}{45}$, откъдето $y = 4{,}5$.

Ако $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = ... = \dfrac{e}{f}$, казваме, че ***a***, ***c***, ..., ***e*** **са пропорционални съответно на *b*, *d*, ..., *f*.**

Числото $k = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = ... = \dfrac{e}{f}$ наричаме **коефициент на пропорционалност**.

2 Карта е изработена в мащаб 1 : 1 000 000 (1 cm от картата отговаря на 1 000 000 cm = 10 km действително разстояние).

а) Запишете коефициента на пропорционалност на разстоянията върху картата и действителните разстояния.

б) Намерете разстоянието между градовете *A* и *B*, ако върху картата то е 18 cm.

в) Пресметнете дължината на отсечката *CD* върху картата, ако реалното разстояние между градовете *C* и *D* е 385 km.

Решение: а) Според дадения мащаб отношението на разстоянията върху картата и действителните разстояния е 1 : 1 000 000 = 0,000001. Следователно $k = 0{,}000001$.

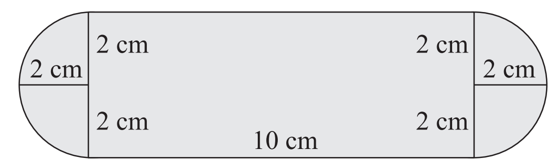
б) По условие 18 : $AB = k = 0{,}000001$.

Тогава AB = 18 : 0,000001= 18 000 000 cm = 180 km.

в) Тъй като 385 km = 38 500 000 cm, то CD : 38 500 000 = k = 0,000001, CD = 38 500 000 . 0,000001= 38,5 cm.

3 Схема на гоблен е изработена в мащаб 2 : 1. Пресметнете височината на ваза от гоблена, ако върху схемата тя е 50 cm.

4 На фигурата е даден план на спортна площадка в мащаб 1 : 1000. Пресметнете площта ѝ в квадратни метри.



5 От 50 kg картофи се получават 7,5 kg нишесте. Колко килограма нишесте ще се получат от 3,6 t картофи?

Решение: Ако от 3,6 t = 3600 kg картофи се получават x kg нишесте, то количеството нишесте от 1 kg картофи е $\dfrac{x}{3600} = \dfrac{7{,}5}{50}$, откъдето получаваме $x = 540$ kg.

6 Кои от пропорциите

$\dfrac{10}{6} = \dfrac{90}{54}$, $\dfrac{0{,}01}{2} = \dfrac{0{,}5}{100}$, $\dfrac{0{,}5}{0{,}3} = \dfrac{180}{108}$, $\dfrac{2}{400} = \dfrac{0{,}7}{140}$ и $\dfrac{1{,}5}{9} = \dfrac{1{,}8}{1{,}08}$

имат един и същ коефициент на пропорционалност?

7 Кораб изминал разстояние от 150 km със скорост 75 km/h. Какво разстояние е изминал за това време друг кораб, който се движел със скорост 30 km/h?

8 За приготвянето на сладко от вишни на 8 kg вишни се поставят 3 kg захар. Колко килограма захар са необходими, ако за сладкото се използват 12 kg вишни?

9 Килограм печени ядки струват 8 лв. Колко струват:
а) 50 g ядки; б) 100 g ядки; в) 150 g ядки; г) 350 g ядки?

10 От 9 kg портокали се приготвят 3 L сок. От колко килограма портокали ще се получат 7 L сок?

11 За 120 работни дни на работник се полагат 8 дни отпуск. Колко дни отпуск има работникът за 300 работни дни?

12 От 10 kg пресни гъби се получават 0,5 kg сушени гъби. От колко килограма пресни гъби ще се получат:
а) 5 kg сушени гъби; б) 8 kg сушени гъби?

13 Мелба съдържа сметанов и шоколадов сладолед в отношение 3 : 2. По колко грама от двата вида сладолед има в мелба с 300 g сладолед?

Решение: Сметановият сладолед е 3 части, а шоколадовият е 2 части от мелбата.

Така частите са общо 3 + 2 = 5.

Една от петте части е 300 : 5 = 60 g. Следователно сметановият сладолед е 60 . 3 = 180 g, а шоколадовият е 60 . 2 = 120 g.

14 Концентрат антифриз се разрежда в отношение 1 : 10. Колко литра вода трябва да се добавят към 0,750 L концентрат?

15 Отношението на дължината и ширината на зеленчукова градина във формата на правоъгълник е 3 : 2. Ако за оградата на градината са използвани 60 m мрежа, намерете колко декара е градината.

16 За работа на един строеж сумата от 1560 лв. била разделена между двама работници в отношение 5 : 8. Колко лева по-малко е получил първият работник? Ако всеки от тях е получавал по 60 лв. на ден, определете по колко дни е работил всеки работник.

17 Намерете отношението $a : c$, ако $a : b = 5 : 3$ и $b : c = 3 : 4$.

Решение: $\frac{a}{c} = \frac{a\,.\,b}{c\,.\,b} = \frac{a}{b} \,.\, \frac{b}{c} = \frac{5}{3} \,.\, \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$

Трите отношения $a : b = 5 : 3$, $b : c = 3 : 4$ и $a : c = 5 : 4$ записваме по-кратко така:

$$\boldsymbol{a : b : c = 5 : 3 : 4}.$$

18 Дарителска кампания в помощ на домове за деца, лишени от родителски грижи, събрала 28 840 лв. Средствата били разпределени в три дома според броя на децата в тях, в отношение 3 : 5 : 6. По колко лева е получил всеки от трите дома?

Решение: Общата сума трябва да се раздели на 3 + 5 + 6 = 14 равни части. Във всяка част ще има по 28 840 : 14 = 2060 лв.

Първият дом е получил 3 части, т.е. 3 . 2060 = 6180 лв.

Вторият дом е получил 5 части, т.е. 5 . 2060 = 10 300 лв.

Третият дом е получил 6 части, т.е. 6 . 2060 = 12 360 лв.

19 Домакиня приготвила мармалад от шипково и ябълково пюре, като количествата шипки, ябълки и захар (в килограми) се отнасят, както 3 : 2 : 1. По колко килограма продукти са необходими за 3 kg мармалад?

20 Плат за тапицерия, дълъг 24 m, трябва да се раздели на три парчета, дължините на които се отнасят, както 1 : 3 : 4. По колко метра е дълго всяко парче?

21 Трима работници си разделят 3640 лв. в отношение 2 : 1,5 : 3.
а) По колко лева е получил всеки от тях?
б) Какво би било средното им възнаграждение?
в) С каква точност е най-добре да се пресметне средната сума, за да се раздели възможно най-голяма част от парите?

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПРОПОРЦИИТЕ

1 Махало на стенен часовник прави 135 залюлявания за 1,5 h. Колко залюлявания прави махалото за 4,5 h?

Решение: Ако залюляванията са x, то $\frac{135}{1,5} = \frac{x}{4,5}$, откъдето намираме $x = \frac{135 \;.\; 4,5}{1,5} = 405$.

2 При сушене липов цвят губи 74% от масата си. Колко килограма цвят трябва да наберем, за да получим 7,8 kg сушен цвят?

Решение: При сушене цветът запазва 100% – 74% = 26% от масата си. Това означава, че от 100 kg цвят се получават 26 kg изсушен цвят.

Нека от x kg се получават 7,8 kg изсушен цвят. Тогава $\frac{100}{26} = \frac{x}{7,8}$, откъдето получаваме $x = \frac{100 \;.\; 7,8}{26} = 30$ kg.

3 Лекарство се приема по правилото: „При всеки прием – по 5 mg на 10 kg“. Ако таблетката е 30 mg, по колко таблетки трябва да приема пациент, който тежи:

а) 60 kg; б) 90 kg?

4 Автомобил изминава 270 km за 4,5 h. За колко часа ще измине 360 km със същата скорост?

5 От 300 kg пшеница се получават 255 kg брашно.

а) Колко килограма пшеница са необходими за 382,5 kg брашно?

б) Колко килограма брашно ще се получат от 100 kg пшеница?

6 За маринването на 3 kg месо трябват 2,4 L 10-процентен разтвор на сол и вода. Колко литра 10-процентен разтвор на сол и вода трябват за маринованeто на:

а) 5 kg месо; б) 8 kg месо?

7 За времето, за което Иван прекопава 10 реда от лозето, Стоян прекопава с 20% по-малко. Колко реда ще прекопае Стоян, ако за същото време Иван прекопава 15 реда?

ПРАВА И ОБРАТНА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ. ГРАФИКА

Права пропорционалност

1 Ако автомобил се движи с 90 km/h, колко километра ще измине за 2 h; 3 h; 3,5 h? Напишете израз, с който да пресмятате изминатия път.

Решение: За 1 h автомобилът изминава 90 km, тогава за 2 h ще измине 2 . 90 = 180 km. За 3 h – 3 . 90 = 270 km; за 3,5 h – 3,5 . 90 = 315 km. Тогава от формулата $\boldsymbol{S = v \;.\; t}$ намираме $\boldsymbol{S = 90 \;.\; t}$.

2 Ако 1 kg месо струва 7,50 лв., намерете цената на 2 kg; 5 kg месо. Каква е зависимостта между цената на месото и теглото му?

Решение: За 2 kg месо цената е 2 . **7,50** = 15 лв.; за 5 kg цената е 5 . **7,50** = 37,50 лв. Очевидно цената е правопропорционална на количеството закупено месо.

Казваме, че една променлива е **правопропорционална** на друга променлива, ако тя се променя по същия начин, както се променя другата променлива. Това означава, че ако едната се **увеличава (намалява)** няколко пъти, толкова пъти **нараства (намалява)** и другата. Зависимостта между тези две променливи се записва така: $\boldsymbol{y = k \;.\; x}$ ($k \neq 0$), а $\boldsymbol{k}$ се нарича коефициент на пропорционалност.
Например: Ако пътуваме с постоянна скорост по магистралата, изминатият път зависи от времето, през което сме пътували, т.е. пътят е правопропорционален на времето.

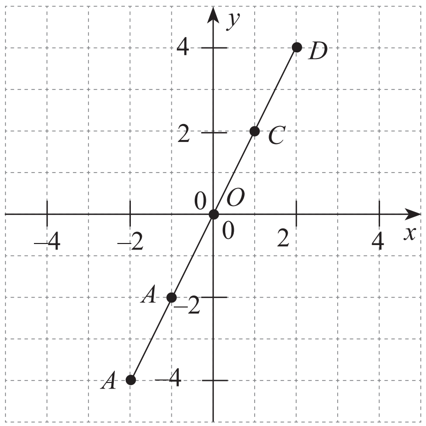
3 Дадени са правоъгълна координатна система Oxy (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) и правата пропорционалност $y = 2 \;.\; x$. Нека $x = -2; -1; 0; 1; 2$. За всяка от дадените стойности на x пресметнете стойността на y и постройте точките с координати $(x; y)$.

Решение:

x	–2	–1	0	1	2
$y = 2 \;.\; x$	–4	–2	0	2	4
Точка	$A\,(-2; -4)$	$B\,(-1; -2)$	$O\,(0; 0)$	$C\,(1; 2)$	$D\,(2; 4)$

При точно чертане ще получим права, която минава през всички точки (виж чертежа) и е в първи и трети квадрант.

Правата, минаваща през **всички точки** с координати **(x; y)**, за които $y = k \cdot x$ ($k \neq 0$), се нарича **графика на правата пропорционалност $y = k \cdot x$**.



За да построим правата, която е графика на правата пропорционалност $y = k \cdot x$, трябва да построим:

1) точка A (x_1; y_1), където x_1 е произволно число, различно от 0, а $y_1 = k \cdot x_1$.

2) правата през точка A и началото O на координатната система.

4 Начертайте графиката на правата пропорционалност $y = -2 \cdot x$. През кои квадранти минава тази графика?

Обратна пропорционалност

Една променлива е **обратнопропорционална** на друга променлива, ако тя се променя по обратния начин – ако едната променлива расте няколко пъти, другата променлива намалява толкова пъти. Зависимостта между тези две променливи се записва така: $\boldsymbol{y = k \cdot \frac{1}{x}}$ или $\boldsymbol{x \cdot y = k}$, където $x \neq 0$ и $k \neq 0$. Казваме, че $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$ са **обратнопропорционални** с коефициент на пропорционалност $\boldsymbol{k}$.

Например: Времето е обратнопропорционално на скоростта. С колкото по-голяма скорост се движим, толкова по-малко време ще пътуваме.

5 Димо има 12 лв. Колко килограма сирене може да купи Димо, ако цената на 1 kg сирене е:

а) 5 лв.; б) 6 лв.; в) 8 лв.?

Решение:

а) От $5 \cdot x = 12$, където x са килограмите купено сирене, намираме $x = 12 : 5$, $x = 2,4$ kg .

б) От $6 \cdot x = 12$, $x = 12 : 6 = 2$ kg.

в) $8 \cdot x = 12$, $x = 12 : 8 = 1,5$ kg.

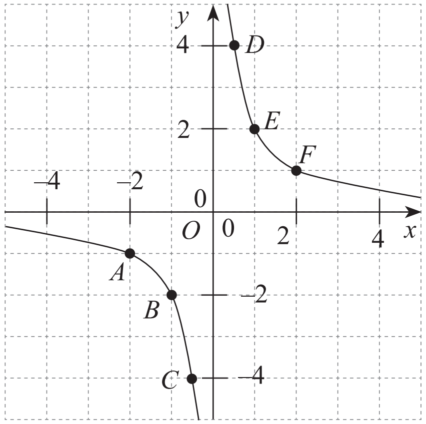
Очевидно цената на купеното сирене е обратнопропорционална на количеството му, т.е. колкото по-скъпо е сиренето, толкова по-малко количество ще купи Димо. Да обобщим: ако количеството сирене е x, а цената е y, то $x \cdot y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$.

6 Дадени са правоъгълна координатна система Oxy (дължините на единичните отсечки по двете оси са равни на 1 cm) и обратната пропорционалност $y = \frac{2}{x}$. Нека $x = -2; -1; -0,5; 0,5; 1; 2$. За всяка от дадените стойности на x пресметнете стойността на y и постройте точките с координати (x; y).

Решение:

x	–2	–1	–0,5	0,5	1	2
$y = \frac{2}{x}$	–1	–2	–4	4	2	1
Точка	A (–2; –1)	B (–1; –2)	C (–0,5; –4)	D (0,5; 4)	E (1; 2)	F (2; 1)

При последователното съединяване на точките ще получим **графиката** на **обратната пропорционалност** $y = \frac{2}{x}$, съставена от линия в първи квадрант и линия в трети квадрант. Тази **графика** се нарича **хипербола** (виж чертежа).



ОБЩИ ЗАДАЧИ

1 Съставете отношението на:

а) 35 ст. към 1 лв.; б) 3 dm към 60 cm;
в) 45 min към 1 h; г) 3 г. към 2 мес.;
д) 125 g към 2 kg; е) 1 g към 1 kg.

2 Кое от отношенията $\frac{3}{13}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{9}{38}$, $\frac{5}{66}$ образува пропорция с отношението 24 : 100?

3 Образуват ли пропорция отношенията?

а) $\frac{40}{18}$ и $\frac{-20}{6}$ б) $\frac{\frac{1}{2}}{5}$ и $\frac{2}{20}$ в) $\frac{5+3}{10+4}$ и $\frac{5}{10}$

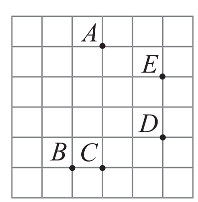
г) $\frac{4+\frac{1}{3}}{6}$ и $\frac{7}{9}$ д) $\frac{1{,}3}{1\frac{1}{3}}$ и $\frac{1\frac{1}{5}}{1{,}2}$ е) $\frac{2^3}{18}$ и $\frac{2^2}{3^2}$

4 Намерете отношението $\frac{a}{c}$, ако:

а) $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$, $\frac{b}{c}=\frac{3}{7}$; б) $\frac{a}{b}=\frac{8}{13}$, $\frac{b}{c}=\frac{26}{17}$.

5 Намерете отношенията.

а) $AC : BC$ б) $BC : AC$
в) $BC : ED$ г) $ED : AC$



6 Намерете числото x в пропорцията.

а) $\frac{2}{5}=\frac{x}{10}$ б) $\frac{6}{x}=\frac{4}{5}$ в) $\frac{x}{4}=\frac{5}{3}$

г) $\frac{2}{x}=\frac{1}{0{,}5}$ д) $1:5=\frac{3}{x}$ е) $0{,}4:x=\frac{1{,}6}{3}$

7 Коефициентът на пропорционалност на пропорцията $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ е k. Намерете коефициента на пропорционалност на:

а) $\frac{2a}{b}=\frac{2c}{d}$; б) $\frac{a}{3b}=\frac{c}{3d}$; в) $\frac{5a}{7b}=\frac{5c}{7d}$.

8 Хонорар от 1320 лв. е разделен между двама автори в отношение 5 : 7. С колко лева по-малко е получил първият автор?

9 Дадена е пропорцията $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$. Проверете, че е пропорция:

а) $\frac{7a}{b}=\frac{21}{5}$; б) $\frac{a}{8b}=\frac{3}{40}$; в) $\frac{5a}{4b}=\frac{3}{4}$;

г) $\frac{a+b}{b}=\frac{3+5}{5}$; д) $\frac{a}{a+b}=\frac{3}{3+5}$; е) $\frac{b+a}{b-a}=\frac{5+3}{5-3}$.

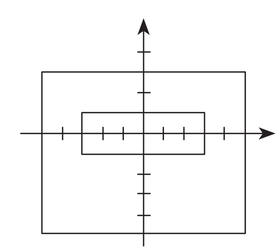
10 Числото a е 60% от числото b, а числото c е 60% от числото d.

а) Покажете, че числата a, b, c и d образуват пропорция, и я напишете.
б) Пресметнете коефициента на пропорционалност на получената пропорция.

11 Карта е изработена в мащаб 1 : 10 000. Колко километра трябва да измине турист между две хижи, разстоянието между които на картата е 7 cm?

12 На картата на Софийското метро разстоянието между спирките „Св. Климент Охридски“ и „Драган Цанков“ е 2,5 cm. Колко километра ще измине мотрисата между двете спирки, ако картата е с мащаб 1 : 100 000?

13 Намерете отношението между периметрите и лицата на правоъгълниците.



КОНТРОЛЕН ТЕСТ

1) Колко е x, ако $\frac{x}{7}=\frac{1}{2}$?

а) $\frac{2}{7}$ б) $\frac{7}{2}$ в) 14 г) $\frac{1}{14}$

2) Каква е стойността на n, ако $\frac{8}{12}=\frac{24}{2n}$?

а) 3 б) 36 в) 18 г) 6

3) Числата a и b се отнасят, както 2 към 5. Ако $a = 8$, на колко е равно b?

а) 40 б) 20 в) 16 г) 80

4) Ако $x : y = 1 : 3$, на колко е равно $\frac{x-y}{y}$?

а) $\frac{-2}{3}$ б) $\frac{2}{3}$ в) $\frac{4}{3}$ г) $\frac{-4}{3}$

5) Ако $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{1}=\frac{y}{3}$, на колко е равно произведението xy?

а) 6 б) 4 в) 9 г) 36

6) Лек автомобил изминава 120 km за $\frac{5}{3}$ h. Колко километра ще измине за $2\frac{1}{2}$ h, ако се движи със същата скорост?

а) 72 km б) 200 km в) 180 km г) 300 km

7) Ако $x : y = 2 : 3$ и $y : z = 3 : 2^3$, на колко е равно $x : z$?

а) $1 : 2^2$ б) $2^0 : 2^3$ в) $1 : 2^{-2}$ г) $4 : 1$

8) Ако $a : b : c = 1 : 2 : 3$ и $a + b + c = 72$, кое е най-голямото от тези числа?

а) 36 б) 24 в) 12 г) 48

9) Междучасието е 10 min, а един учебен час е 40 min. Кое НЕ е отношението между междучасие и учебен час?

а) 10 : 40 б) 25 : 100 в) 1 : 4 г) 4 : 1

10) Ако $\frac{x+2}{3}=\frac{9}{8}$, на колко е равно x?

а) $\frac{11}{8}$ б) $\frac{25}{8}$ в) 11 г) $\frac{43}{8}$

11) Ако $x : y = 3$ и $x + y = 4$, на колко е равно по-голямото от числата x и y?

а) 4 б) 3 в) 1 г) 2

12) Ако $a : b = 3 : 5$ и $a + b = 16$, на колко е равно $a - b$?

а) –4 б) –2 в) 2 г) 4

13) Доходите на Пенка се отнасят към доходите на съпруга ѝ, както 2 : 3. Двамата заедно получават 1500 лв. за месец. Колко лева получава Пенка за месец?

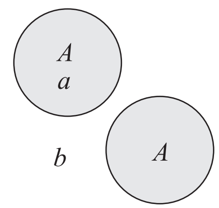
а) 1000 лв. б) 900 лв. в) 800 лв. г) 600 лв.

14) В една салата има x g домати, y g краставици и $4 . y = 3 . x$. Каква част от салатата са доматите?

а) $\frac{3}{4}$ б) $\frac{4}{3}$ в) $\frac{4}{7}$ г) $\frac{3}{7}$

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ С ТЯХ. ГРАФИЧНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА МНОЖЕСТВА

Понятието „множество“ е първично в математиката и не може да се дефинира чрез други понятия. По интуиция обаче е ясно какво е множество – това е съвкупност от обекти (предмети), които имат някакво общо свойство, определящо кои елементи са от тази съвкупност. Прието е множествата да се означават с големи латински букви: ***A***, ***B***, ***C*** ... . Обектите, които **принадлежат** на дадено множество, се наричат негови елементи и се означават с малки латински букви: a, b, c... .



Когато един елемент е от дадено множество, записваме $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ и четем „***a*** принадлежи на ***A***“.

Когато един елемент **не е** от дадено множество, записваме $\boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{A}$ и четем „***b*** не принадлежи на ***A***“.

Множеството, което съдържа краен брой елементи, се нарича ***крайно множество***. Множество, което има безкраен брой елементи, се нарича ***безкрайно множество***. Множество, което не съдържа нито един елемент, се нарича ***празно множество*** и се бележи със символа $\varnothing$.

Множествата записваме по два начина:

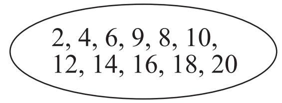
- Записваме елементите им и ги поставяме в скоби или ги заграждаме със затворени линии. Например:

✓ $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ е множеството от нечетните числа, по-малки от 20. Броят на елементите му е 10;

✓ $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$– множеството от малките букви на английската азбука. Броят на елементите му е 26;

✓ $N = \{-3, -2, -1; 0; 1; 2; 3\}$ – множеството от целите числа, чиято абсолютна стойност е по-малка от 4.

Този начин е удобен за **крайни множества**.



- Посочваме свойството, което характеризира елементите:

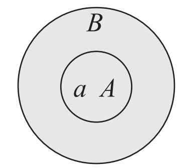
✓ Множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа е безкрайно;

✓ Множеството B = {всички числа, кратни на 5}.

Този начин е удобен за **безкрайни множества**.

Множеството ***A*** се нарича подмножество на множеството ***B***, когато всеки елемент на ***A*** е елемент и на ***B***. Записваме $A \subset B$ или $B \supset A$. Например множеството

$V = \{a, e, i, o, u\}$ е подмножество на множеството M от пример 2.



За всеки елемент $a \in A \Rightarrow a \in B$.

За всяко множество ***A*** е изпълнено $A \subset A$ и $\varnothing \subset A$.

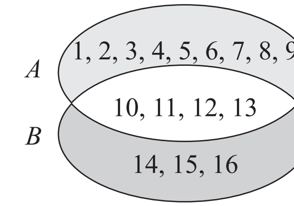
Две множества са равни, когато те се състоят от едни и същи елементи, т.е. $A \subset B$ и $B \subset A$. Записва се $\boldsymbol{A = B}$.

(1) Дадени са множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ и $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Запишете множеството, което съдържа:

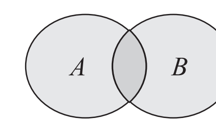
а) само общите елементи на A и B; б) всички елементи на A и B.

Решение: а) Множеството на общите елементи на A и B е $\{10, 11, 12, 13\}$. В този случай казваме, че сме определили **сечението** на двете множества.

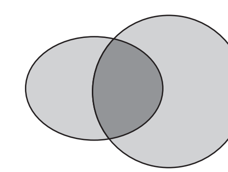
б) Множеството от всички елементи на A и B е $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. В този случай казваме, че сме определили **обединението** на двете множества.



Сечение на две множества A и B наричаме множеството, което съдържа всички елементи, принадлежащи едновременно и на A, и на B. Записваме $\boldsymbol{A \cap B}$. Ако двете множества нямат общи елементи, сечението им е празното множество, т.е. $A \cap B = \varnothing$.



Обединение на две множества A и B наричаме множеството, което съдържа всички елементи както от A, така и от B. Забележете, че в едно множество **няма** повтарящи се елементи. Ако нещо се среща и в двете множества, то се взема веднъж. Записваме $\boldsymbol{A \cup B}$.



(2) Запишете две подмножества с брой на елементите 3 на множеството A на целите числа с абсолютна стойност, по-малка от 5.

Решение: $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $M = \{1, 2, 3\}$ и $N = \{-2, -1, 0\}$ са две такива подмножества. Дайте още няколко примера за подмножества на A.

(2) Ако $A = \{4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 16\}$ и $B = \{6, 9\ 11, 12, 14, 15, 16\}$, намерете $A \cap B$ и $A \cup B$.

СЛУЧАЙНО СЪБИТИЕ. ВЕРОЯТНОСТ НА СЛУЧАЙНО СЪБИТИЕ КАТО ОТНОШЕНИЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИ

Всяко явление протича при известни условия. Обратно, при определени условия протича някакво явление, но ние не сме в състояние да опишем всички условия, при които протича дадено явление. Например в летен ден може да е слънчево, но може и да вали дъжд. Или, ако хвърлим монета, върху която различаваме лицева и гербова страна, върху хоризонтална повърхност тя не застава върху повърхността отвестно, а пада върху една от страните си. Когато хвърляме зар, получаваме точки от 1 до 6 и т.н.

Ние определяме само някои условия за протичането на дадено явление, което ще наричаме **събитие**. При реализирането на тези условия даденото събитие може да се сбъдне, а може и да не се сбъдне. Такова **събитие**, което при даден комплекс от условия може да се сбъдне, а може и да не се сбъдне, наричаме **случайно**.

Събитие наричаме резултата, който се получава при извършване на определена дейност (извършване на опит).

1 Колко различни случайни събития може да се случат, ако хвърлим:

а) правилен зар; б) монета върху хоризонтална повърхност?

Решение: а) На всяка от стените на правилен зар има различен брой точки – от 1 до 6. Случайните събития, които може да се сбъднат, са: „Пада се 1“; „Пада се 2“; „Пада се 3“; „Пада се 4“; „Пада се 5“; „Пада се 6“.

б) Всяка монета има две страни – „лице“ и „герб“. Следователно случайните събития, които може да се сбъднат, са „Пада, се лице“ и „Пада се герб“.

2 В кутия има само топки за тенис. Може ли да се случи събитието:

а) „Изважда се топка за тенис“;
б) „Изважда се топка за голф“?

Решение: а) Събитието „Изважда се топка за тенис“ винаги настъпва, защото в кутията има само топки за тенис.

б) Събитието „Изважда се топка за голф“ никога не може да се случи.

Събитие, което винаги настъпва при извършване на опит, се **нарича достоверно (истина)**.

Събитие, което никога не настъпва при извършване на опит, се **нарича невъзможно (лъжа)**.

3 В кутия има 3 бели, 5 зелени и 6 червени топчета. Изваждаме топчета от кутията, без да ги гледаме. Определете кое от събитията е *случайно, достоверно* или *невъзможно.*

а) „Изваждаме 3 топчета и всички са бели“
б) „Изваждаме жълто топче“
в) „Изваждаме едно топче, което е или бяло, или зелено, или червено“

Решение:

а) В кутия има 3 бели, 5 зелени и 6 червени топчета, следователно може тези три топчета да са от всеки един цвят, да са разноцветни, а може и да са само бели, т.е. това събитие може да се случи, а може и да не се случи. Тогава събитието „Изваждаме 3 топчета и всички са бели“ е случайно.

б) В кутията няма жълти топчета, т.е. събитието „Изваждаме жълто топче“ е *невъзможно.*

в) Събитието „Изваждаме едно топче, което е или бяло, или зелено, или червено“ е *достоверно*, защото топчетата в кутията са от тези три цвята.

4 В урна има 6 бели и 4 черни топки, различаващи се само по цвета. Случайно, без да гледаме, изваждаме една топка. Запишете възможните случайни събития при проведения опит. Кое събитие е по-възможно – да извадим бяла или да извадим черна топка?

Решение: Възможните случайни събития са две: „Изваждаме бяла топка“ и „Изваждаме черна топка“. И тъй като белите топки са повече, по-голяма възможност има да извадим бяла топка.

Както вече отбелязахме, има събития, които при многократно реализиране на комплекс от условия могат да се сбъднат, а могат и да не се сбъднат. С всяко случайно събитие е свързана количествена характеристика, която определя **шанса (вероятността)** за сбъдване на това събитие. С това се занимава теорията на вероятностите.

Вероятността P на едно **събитие** се нарича числото, равно на отношението на броя на благоприятните изходи (случаи, при които събитието настъпва) към броя на всички възможни изходи (случаи).

$$P = \frac{\textbf{брой благоприятни изходи}}{\textbf{брой на всички възможни изходи}}$$

(5) При условието на задача 4 намерете каква е вероятността да извадим бяла топка.

Решение: Общо топките са 6 + 4 = 10 и всяка от тях може да бъде извадена. Следователно всички изходи са 10. Благоприятните изходи са тези, в които извадената топка е бяла, а тъй като те са 6, то благоприятните изходи са 6. Търсената вероятност е $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

(6) Каква е вероятността при хвърляне на правилен зар да се паднат:
а) 3 точки; б) по-малко от 3 точки; в) 8 точки?

Решение: На всяка от стените на правилен зар има различен брой точки от 1 до 6. Случайните събития, които може да се случат, са: „Пада се 1 точка“; „Падат се 2 точки“; „Падат се 3 точки“; „Падат се 4 точки“; „Падат се 5 точки“; „Падат се 6 точки“; т.е. всички възможни изходи са 6.

а) Благоприятният изход е „Падат се 3 точки“, т.е. един. Тогава вероятността е $P = \frac{1}{6}$.

б) Благоприятните изходи са 2 – „Пада се 1 точка“ и „Падат се 2 точки“, тогава вероятността да се паднат по-малко от 3 точки, е $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

в) Благоприятните изходи да се паднат 8 точки, са 0, тъй като това е *невъзможно събитие* $\Rightarrow P = \frac{0}{6} = 0$.

(7) На отделни картончета са написани четните числа от 1 до 20. Случайно избираме едно от тях. Каква е вероятността числото, написано на това картонче, да се дели на 2?

Решение: Четните числа от 1 до 20 са 10 на брой, следователно всички картончета са 10, т.е. всички изходи са 10. Но и благоприятните изходи са 10, защото всяко едно четно число се дели на 2. Тогава събитието „Изтегленото картонче да съдържа число, което се дели на 2“ е *достоверно* и вероятността е $P = \frac{10}{10} = 1$.

Извод: Вероятността на **невъзможно събитие е $P = 0$**.
Вероятността на **достоверно събитие е $P = 1$**.
Вероятността на **случайно събитие** е правилна дроб ($0 < P < 1$).

(8) Една монета хвърляме два пъти. Каква е вероятността и двата пъти монетата да падне върху лицевата си страна?

Решение: Ако с Л означим събитието „Падане на монетата при едно хвърляне върху лицевата страна“ и с Г – „Падане на монетата при едно хвърляне върху гербовата страна“, то всички възможни изходи при две последователни хвърляния са: ЛЛ; ЛГ; ГЛ; ГГ, т.е. 4 възможни изхода. Имаме само един благоприятен изход – ЛЛ. Тогава вероятността е $P = \frac{1}{4}$.

(9) На 5 картончета са написани буквите на думата „УСПЕХ“ и са обърнати с написаното надолу. Намерете каква е вероятността, ако вземем произволно каронче, да изтеглим гласна буква?

Решение: Тъй като имаме 5 картончета, то всички възможни изходи са 5. Картончетата с гласни букви са 2 – У и Е, т.е. благоприятните изходи са 2. Тогава вероятността е $P = \frac{2}{5}$.

(10) Намерете вероятността при едновременно хвърляне на два еднакви зара да се паднат еднакъв брой точки на всеки от тях.

Решение: Всяка стена от единия зар се съчетава с всяка от шестте стени на другия зар, а именно (всяка цифра означава стена, имаща съответно толкова точки):

11; 12; 13; 14; 15; 16; 21; 22; 23; 24; 25; 26;
31; 32; 33; 34; 35; 36; 41; 42; 43; 44; 45; 46;
51; 52; 53; 54; 55; 56; 61; 62; 63; 64; 65; 66.

Това означава, че всички изходи са 6 . 6 = 36. Благоприятните са двойките 11, 22, 33, 44, 55, 66 – 6 на брой. Тогава вероятността е $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(11) Дадено е едно двуцифрено число, което е втората степен на друго число. Каква е вероятността това число да е по-малко от 50?

Решение: Всички двуцифрени квадрати, които са втората степен на друго число, са 6, а именно това са числата $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$. Следователно всички изходи са 6. Сред тях по-малки от числото 50 са: 16, 25, 36, 49, т.е. благоприятните изходи са 4. Следователно търсената вероятност е $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

ОПИСАНИЕ НА ДАННИ – СРЕДНОАРИТМЕТИЧНО

(1) Докато се качвал със семейството си в асансьор, Иван прочел следната табелка: „Товароносимост 320 kg – 4 лица“. Бащата на Иван тежи 120 kg, майка му – 60 kg, сестра му – 30 kg, а Иван – 50 kg. Колко средно тежи всеки от тях? Ще се претовари ли асансьорът? Може ли да се возят в него едновременно дядо му (95 kg), баща му и чичо му (103 kg), без асансьорът да се претовари? Колко средно тежи всеки от тях?

Решение: Асансьорът се претоварва, когато товарът надхвърли 320 kg. Броят на хората е ориентировъчен, като се счита, че един човек тежи средно 320 : 4 = 80 kg. Семейството тежи общо 120 + 60 + 50 + 30 = 260 kg и понеже са четирима, ще разделим килограмите на 4, или 260 : 4 = 65 kg. Всеки от семейството е средно по 65 kg и асансьорът няма да се претовари, понеже 260 < 320 или 65 < 80.

Сборът от масите на бащата, дядото и чичото на Иван е 120 + 103 + 95 = 318 kg, т.е. те ще могат да се возят на асансьора. Средно всеки от тримата тежи 318 : 3 = 106 kg.

Ако $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ са ***n*** на брой числа, то числото, което получаваме, като разделим сбора им на техния брой, наричаме **средноаритметично на числата**: $\left(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\right):n=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$.

Средноаритметично пресмятаме при определяне на среден успех (за срок, за година), средна температура, средна месечна заплата, среден добив, средна норма и т.н.

(2) Намерете средноаритметичното на числата.

а) 15 и 17 б) 24,5 и 27,3 в) 2,3; 2,2 и 2,4

г) 0,62; 0,59; 0,61 и 0,58 д) 4,52; 5,02; 4,06; 5,12 и 4,42

(3) На колко е равно средноаритметичното на няколко равни помежду си числа?

(4) Намерете средноаритметичното на числата:
2; 2; 2; 3; 3; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8.

Решение: Търсеното число е $\frac{3\,.\,2+2\,.\,3+2\,.\,5+2\,.\,6+4\,.\,7+2\,.\,8}{15}=\frac{78}{15}=5,2$.

Когато няколко числа са равни, те участват в средоаритметичното толкова пъти, колкото е броят им.

(5) Намерете средния годишен успех на Мими, ако тя изучава 12 предмета и завършва с 8 шестици, 3 петици и 1 четворка.

Решение: Средният успех на Мими е равен на $\frac{8\,.\,6+3\,.\,5+4}{12}=\frac{67}{12}=5,58$.

(6) Автобус се движил 4 h със скорост 80 km/h и 2 h със скорост 65 km/h. С каква постоянна скорост би тябвало да се движи този автобус, за да измине същото разстояние за 6 h?

Решение: Автобусъте изминал 4 . 80 + 2 . 65 = 450 km. Ако се движи с постоянна скорост, тя трябва да е v = 450 : 6 = 75 km/h.

Казваме, че автомобилът се е движил със **средна скорост** 75 km/h.

Средната скорост на движение е постоянната скорост, с която бихме изминали целия път за дадено време.

(7) Турист вървял 3 h. През първия час изминал 5,1 km, през втория – 5,4 km, а през третия – 4,8 km. С каква средна скорост би трябвало да се движи туристът, за да измине разстоянието за 3 h?

(8) За да установят норма за време на изготвяне на детайл, провели четири наблюдения. При първия опит детайлът бил изготвен за 1 h 15 min, при втория – за 57 min, при третия – за 1 h 9 min, а при четвъртия – за 1 h 23 min. За норма приели средноаритметичното на получените резултати. Пресметнете нормата.

(9) Средноаритметичното на три числа е 1,6. Едното от числата е 1, а другото е 1,2. Намерете третото число.

Решение: Ако третото число е x, последователно получаваме:

(1 + 1,2 + x) : 3 = 1,6; 2,2 + x = 1,6 . 3; x = 4,8 – 2,2; x = 2,6, т.е. третото число е 2,6.

(10) Широчината на река била измерена на 5 места. Разултатите от измерванията на четирите места са: 5,1 m; 5 m; 5,2 m и 5 m. Какъв е резултатът от петото измерване, ако за широчина на реката е прието средноаритметичното от петте измервания и то е 5,12 m?

(11) Какъв е средният месечен доход на човек от четиричленно семейство с две деца, ако месечният доход на бащата е 950 лв., а на майката – 650 лв.?

ОРГАНИЗИРАНЕ И ПРЕДСТАВЯНЕ НА ДАННИ

Резултатите от много научни, обществени и икономически изследвания се описват с числа. Когато използваме информация, зададена с числа, казваме, че работим с **данни**. Частта от математиката, в която се изучават методите за представяне и анализиране на данни, се нарича **статистика**.

№ на ученика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оценка	2	3	4	3	5	6	2	5	6	5	5	2
№ на ученика	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Оценка	3	4	6	5	6	4	3	4	3	5	5	6

1 В таблицата са дадени резултатите от контролно по математика в $6.^{а}$ клас.

а) Организирайте тези данни в таблица с броя на оценките от всеки вид.

б) Представете данните от таблицата чрез диаграма.

в) Намерете средния успех от това контролно по математика.

г) Колко ученици имат успех над средния за класа?

д) Каква е вероятността произволно избран ученик да има успех над средния за класа?

Решение: а)

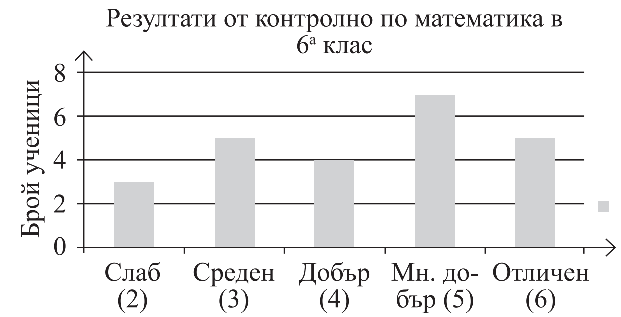
Оценка	**Слаб (2)**	**Среден (3)**	**Добър (4)**	**Мн. добър (5)**	**Отличен (6)**
Брой	3	5	4	7	5

б) Чертаем хоризонтална ос, по която ще нанасяме вида на оценките, и вертикална ос, по която ще нанасяме броя им. Избираме единична отсечка за вертикалната ос, така че да можем да нанесем минималния брой – 3, и максималния – 7. За всеки вид оценка начертаваме правоъгълник с височина, отговаряща на броя (виж диаграмата по-долу).

в) Средният успех е средноаритметично на тези 24 оценки. Следователно средният успех е $\dfrac{3.2+5.3+4.4+7.5+5.6}{24}=\dfrac{102}{24}=4,25$.

г) Успех, по-висок от средния, имат учениците, получили 5 и 6, т.е. 7 + 5 = 12 ученици.

д) Броят на всички възможни изходи е броят на всички ученици – 24. Броят на благоприятните изходи намерихме в подусловие г) – 12. Тогава вероятността произволно избран ученик да има успех над средния за класа, е $P=\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$.



Този вид диаграми се наричат **блокови диаграми** или още **хистограми**.

За организирането на данните в таблица и представянето им с диаграма е много удобно да се използва програмата Excel.

2 В предприятие има 20 служители, които получават следните заплати: двама по 470 лв.; 8 по 650 лв.; 5 по 800 лв.; 3 по 1050 лв.; 1 – 1850 лв., 1 – 2500 лв.

а) Организирайте тези данни в таблица с броя на служителите със съответната заплата.

б) Представете данните от таблицата чрез диаграма.

в) Намерете средната работна заплата в тази фирма.

г) Колко от служителите имат под средната работна заплата в тази фирма?

д) Каква е вероятността произволно избран служител да получава под средната работна заплата във фирмата?

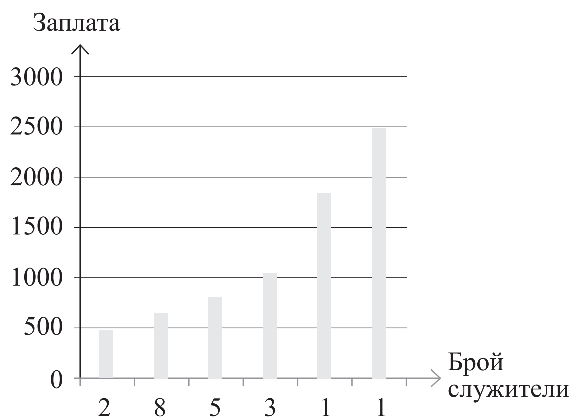
Решение: а)

Заплата, лв.	470	650	800	1050	1850	2500
Брой служители	2	8	5	3	1	1

б) Чертаем хоризонтална ос, по която ще нанасяме броя на служителите, и вертикална ос, по която ще нанасяме заплатите им. Избираме единична отсечка за вертикалната ос, така че да можем да нанесем минималната заплата – 470, и максималната

– 2500. За всеки брой служители начертаваме правоъгълник с височина, отговаряща на заплатата им.

Ето как би изглеждала една диаграма (удобно е да използвате програмата Excel).



в) Средната работна заплата в тази фирма е средноаритметичното на 20-те заплати, т.е.

$$\frac{3 \,.\, 470 + 8 \,.\, 650 + 5 \,.\, 850 + 3 \,.\, 1050 + 1850 + 2500}{20} = \frac{17640}{20} = 882 \text{ лв.}$$

г) Заплата, по-ниска от средната работна заплата 882 лв. във фирмата, имат тези, които получават съответно 470 лв., 650 лв., и 800 лв., а това са общо 2 + 8 + 5 = 15 служители.

д) Броят на всички възможни изходи е броят на всички служители във фирмата, т.е. 20. Броят на благоприятните изходи намерихме в поусловие г) – 15. Тогава вероятността произволно избран служител да получава под средната работна заплата във фирмата, е $P = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

3 В един клас има 24 ученици. В таблицата под номера на всеки ученик е даден броят часове за последната седмица, през които той е спортувал.

№ на ученика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Брой часове	4	2	5	4	6	6	3	7	7	5	5	10
№ на ученика	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Брой часове	2	2	3	6	5	7	3	5	3	10	5	6

а) Организирайте тези данни в таблица с броя на часовете от всеки вид, отделяни за спорт от учениците през седмицата.

б) Представете данните от таблицата чрез диаграма.

в) Намерете средно колко часа на седмица са спортували учениците от този клас.

г) Колко ученици през седмицата са спортували над средния брой часове за класа?

д) Каква е вероятността произволно избран ученик да е спортувал над средния брой часове за класа?

4 Асен записвал по колко километра на ден е изминавал през последната седмица с личния си автомобил. Данните са дадени в таблицата.

Ден от седмицата	**Изминати километри**
понеделник	80
вторник	70
сряда	70
четвъртък	100
петък	70
събота	120
неделя	120

а) Организирайте тези данни в таблица с броя на дните и изминатите еднакви разстояния.

б) Представете данните от таблицата чрез диаграма.

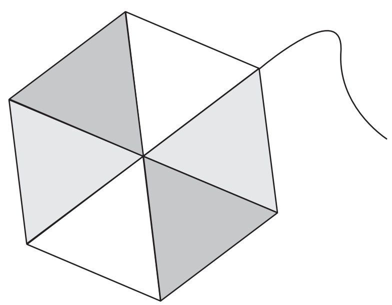
в) Намерете средно колко километра на ден е изминавал Асен.

г) Колко дни през седмицата той е изминавал над средния брой километри за седмицата?

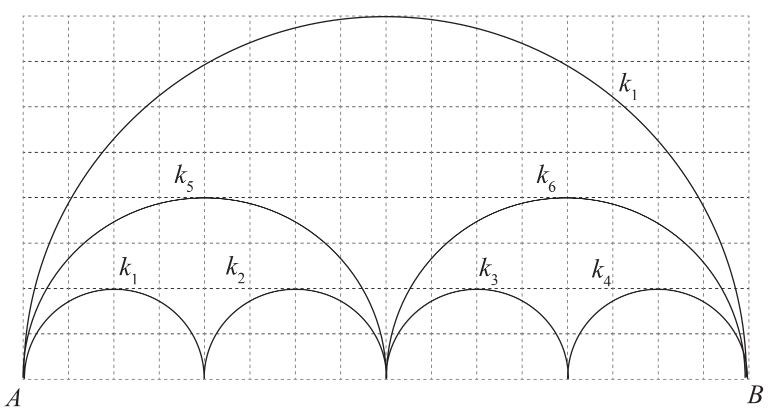
ОБЩ ПРЕГОВОР

1 Върху каква фигура са разположени звездите от символа на ЕС?

2 Каква фигура е хвърчилото?



3 Начертайте фигурата, ако $AB = 8$ cm.



4 Велосипедист се движи по кръгла писта с радиус 100 m. Колко обиколки трябва да направи, за да измине 44 km $\left(\pi \approx \dfrac{22}{7}\right)$?

5 Начертайте правилен шестоъгълник.

6 Лицето на правилен петоъгълник е 690 cm. Намерете апотемата му, ако страната му е 20 cm.

7 Периметърът на правилен осмоъгълник е 120 cm, а апотемата му е 18,1 cm. Намерете лицето на осмоъгълника.

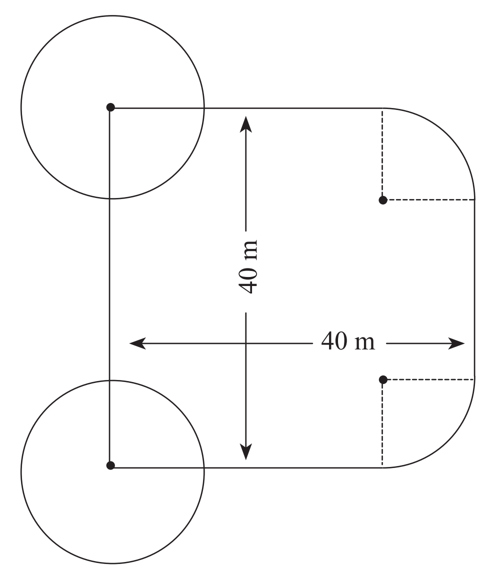
8 Да приемем, че земната орбита има приблизително формата на окръжност с център Слънцето. Средното разстояние от Земята до Слънцето е 149 670 000 km.

а) Определете диаметъра на земната орбита.

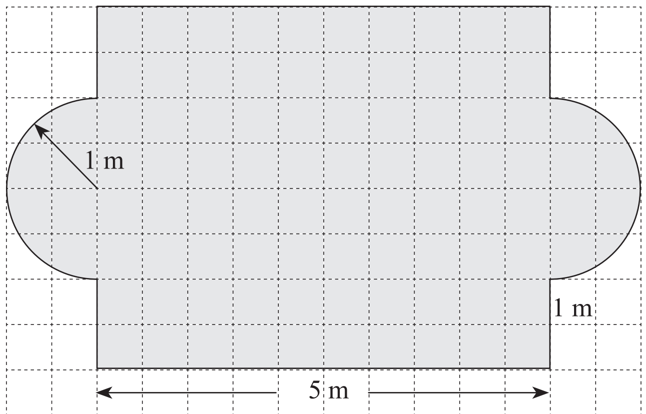
б) Приблизително какво разстояние изминава Земята за: 1 година; половин година; един сезон ($\dfrac{1}{4}$ от годината)?

9 Минутната стрелка на стенен часовник има дължина 42 cm. За колко време краят на стрелката ще опише част от окръжност с дължина 21π cm?

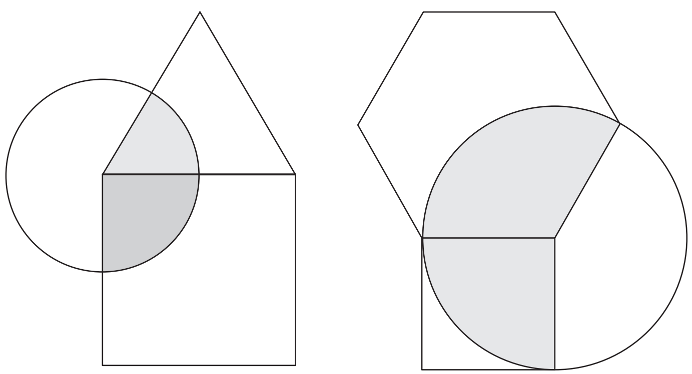
10 На фигурата е показана формата на външната страна на средновековен замък. За колко време часовой ще направи една пълна обиколка на замъка, ако се движи със скорост 4 km/h?



(11) Определете лицето на цветната леха.



(12) Каква част от кръга е оцветена, ако дадените многоъгълници са правилни?



(13) Част от техническите параметри на микровълнова печка са дадени в таблицата:

размери на фурната (в mm)	306/211/320
обем (в L)	20

а) Намерете обема на фурната.

б) Вярно ли е дадено приближението за обема на фурната в литри?

(14) Намерете лицето на околната повърхнина и обема на правилна шестоъгълна призма с основен ръб 12 cm, апотема на основата 10,4 cm и височина 1,5 dm.

(15) Обемът на правилна четириъгълна призма е 499,8 cm^3. Намерете основния ѝ ръб, ако височината ѝ е 1,02 dm.

(16) Намерете лицето на околната повърхнина и обема на правилна петоъгълна пирамида с основен ръб 10 cm, апотема 10 cm, височина 7 cm и апотема на основата 7 cm.

(17) Правилна триъгълна призма има обем 840 cm^3. Върхът M на пирамидата $ABCM$ е на равни разстояния от върховете на основата. Намерете обема и височината на пирамидата.

Тест № 1А (Входящ тест)

Име: ……………………………………………………………………………………………………

ЗАДАЧА 1. Резултатът от кое пресмятане е число с еднакви цифри на десетите и стотните?

А) 1,97 + 4,3 **Б)** 8,3 . 0,4 **В)** 0,308 : 0,4 **Г)** 5 – 0,66

ЗАДАЧА 2. Кое е числото, което е с $\frac{1}{2}$ по-голямо от частното на числата $2\frac{3}{7}$ и $\frac{34}{49}$?

А) $3\frac{1}{2}$ **Б)** 4 **В)** 7 **Г)** 8

ЗАДАЧА 3. Колко е $3{,}333 \cdot \frac{1}{2} - 1{,}333 \cdot \frac{1}{2}$?

А) 2 **Б)** 1 **В)** 3 **Г)** 1,5

ЗАДАЧА 4. Съд с форма на куб има вместимост 8 L. Пресметнете лицето на околната му повърхнина.

А) 0,8 dm^2 **Б)** 8 dm^2 **В)** 16 dm^2 **Г)** 160 cm^2

ЗАДАЧА 5. За приготвяне на сладко от вишни трябват 3,5 kg вишни и 1,5 kg захар. Какво е процентното съдържание на вишните в сладкото?

А) 35% **Б)** 70% **В)** 140% **Г)** 350%

ЗАДАЧА 6. Равнобедрен трапец има бедро 0,54 dm. Височината му е равна на $\frac{1}{3}$ от бедрото, а обиколката му е 30 cm. Колко квадратни сантиметра е лицето на трапеца?

А) 5,2056 cm^2 **Б)** 17,28 cm^2 **В)** 18,72 cm^2 **Г)** 34,56 cm^2

ЗАДАЧА 7. Единият катет на правоъгълен триъгълник е 4 cm, а другият е 0,75 от него. Ако хипотенузата му е 5 cm, колко сантиметра е височината към нея?

……………………………………………………………………………………………………

ЗАДАЧА 8. Колко литра е вместимостта на аквариум с форма на правоъгълен паралелепипед, ако размерите му са: дължина 1,4 m, широчина 40 cm и височина 50 cm?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 8:

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Тест № 1Б (Входящ тест)

Име: ……………………………………………………………………………………………………

ЗАДАЧА 1. Резултатът от кое пресмятане е число с еднакви цифри на десетите и стотните?

А) 30,12 – 3,8 **Б)** 0,055 : 0,5 **В)** 1,17 + 6 **Г)** 16,5 . 0,2

ЗАДАЧА 2. Кое е числото, което е с $\frac{2}{7}$ по-малко от частното на числата $1\frac{1}{3}$ и 4?

А) $\frac{1}{21}$ **Б)** $1\frac{2}{7}$ **В)** $1\frac{4}{7}$ **Г)** 7

ЗАДАЧА 3. Колко е $5{,}333 \cdot \frac{1}{2} - 1{,}333 \cdot \frac{1}{2}$?

А) 2 **Б)** 1 **В)** 3 **Г)** 2,5

ЗАДАЧА 4. Лицето на повърхнината на куб е 0,96 dm^2. Пресметнете обема му.

А) 0,16 dm^3 **Б)** 0,512 dm^3 **В)** 0,6 dm^3 **Г)** 64 dm^3

ЗАДАЧА 5. За приготвяне на компот от праскови и кайсии трябват 5,4 kg праскови и 3,6 kg кайсии. Какво е процентното съдържание на кайсиите в компота?

А) 3,6% **Б)** 36% **В)** 40% **Г)** 360%

ЗАДАЧА 6. Равнобедрен трапец има бедро 0,54 dm. Височината му е равна на $\frac{1}{3}$ от бедрото, а обиколката му е 30 cm. Колко квадратни сантиметра е лицето на трапеца?

А) 5,2056 cm^2 **Б)** 17,28 cm^2 **В)** 18,72 cm^2 **Г)** 34,56 cm^2

ЗАДАЧА 7. Единият катет на правоъгълен триъгълник е 8 cm, а другият е 0,75 от него. Ако хипотенузата му е 10 cm, колко сантиметра е височината към нея?

……………………………………………………………………………………………………

ЗАДАЧА 8. Колко литра е вместимостта на аквариум с форма на правоъгълен паралелепипед, ако размерите му са: дължина 0,8 m, широчина 4 dm и височина 50 cm?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 8:

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Тест № 2А

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Кое е вярно?

А) Цилиндър се получава при въртенето на полуокръжност около диаметъра ѝ.
Б) Цилиндър се получава при въртенето на правоъгълен триъгълник около един от катетите му.
В) Цилиндър се получава при въртенето на правоъгълник около една от страните му.
Г) Цилиндър се получава при въртенето на полукръг около диаметъра му.

ЗАДАЧА 2. Колко сантиметра е радиусът на кълбо с обем 36π cm^3?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 6 **Г)** 9

ЗАДАЧА 3. Колко сантиметра е радиусът на окръжност с дължина 25,12 cm?

А) 2 **Б)** 4 **В)** 8 **Г)** 12

ЗАДАЧА 4. Призма има 8 върха. Колко е сборът на броя на ръбовете и броя на стените ѝ?

А) 12 **Б)** 16 **В)** 18 **Г)** 20

ЗАДАЧА 5. Пресметнете лицето на околната повърхнина на конус с радиус $r = 0{,}5$ dm и образуваща $l = 8$ cm.

А) 4π dm^2 **Б)** 4π cm^2 **В)** 40π cm^2 **Г)** $0{,}4\pi$ m^2

ЗАДАЧА 6. Правилна четириъгълна пирамида има височина 12 cm, лице на околната повърхнина 360 cm^2 и обем 400 cm^3. Намерете основния ръб и апотемата на пирамидата.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Тест № 2Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Кое е вярно?

А) Конус се получава при въртенето на полуокръжност около диаметъра ѝ.
Б) Конус се получава при въртенето на правоъгълен триъгълник около един от катетите му.
В) Конус се получава при въртенето на правоъгълник около една от страните му.
Г) Конус се получава при въртенето на полукръг около диаметъра му.

ЗАДАЧА 2. Каква е дължината на радиуса на сфера с лице на повърхнината 36π dm^2?

А) 3 cm **Б)** 3 dm **В)** 18 cm **Г)** 9 dm

ЗАДАЧА 3. Колко сантиметра е радиусът на кръг с лице 28,26 cm^2?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4,5 **Г)** 9

ЗАДАЧА 4. Правилна призма има 6 върха. Колко е сборът на броя на ръбовете и броя на стените ѝ?

А) 12 **Б)** 14 **В)** 16 **Г)** 18

ЗАДАЧА 5. Пресметнете лицето на околната повърхнина на цилиндър с радиус $r = 3$ cm и височина $h = 0,5$ dm.

А) 3π cm^2 **Б)** 3π dm^2 **В)** 30π cm^2 **Г)** $0,3\pi$ m^2

ЗАДАЧА 6. Правилна триъгълна пирамида има основен ръб 10,4 cm, височина 4 cm и обем 62,4 cm^3. Намерете лицето на околната и на пълната повърхнина на пирамидата, ако апотемата ѝ е 5 cm.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Тест № 3А

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Колко е $-6 + (-5) - (-9) - (+5) - |-2|$?

А) -17 **Б)** -13 **В)** -9 **Г)** 1

ЗАДАЧА 2. Кои числа са подредени във възходящ ред?

А) $-6; -7; 0; 5$ **Б)** $-7; -6; 0; 5$ **В)** $-7; 0; -6; 5$ **Г)** $0; 5; -6; -7$

ЗАДАЧА 3. Колко е сборът на целите числа, които са по-големи от -19 и по-малки от 17?

А) -37 **Б)** -35 **В)** -2 **Г)** 0

ЗАДАЧА 4. Колко е x, ако $-5,2 - x = 6,3 + (-0,3)$?

А) $-11,2$ **Б)** $-0,8$ **В)** $0,8$ **Г)** $11,2$

....

ЗАДАЧА 5. Кое е неизвестното число x в равенството $x\ .\ 0,8 = (1 - 1,8)\ .\ (-5)$?

....

ЗАДАЧА 6. Колко килограма тежи железен лост с диаметър 50 mm и дължина 3,5 m, ако 1 cm^3 от него тежи 7,8 g?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 3Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Колко е $-5 + (-4) - (-9) - (+4) - |-1|$?

А) -23 **Б)** -15 **В)** -7 **Г)** -5

ЗАДАЧА 2. Кои числа са подредени във възходящ ред?

А) $-7; -4; 0; 3$ **Б)** $-4; -7; 0; 3$ **В)** $-7; 0; -4; 3$ **Г)** $0; 3; -4; -7$

ЗАДАЧА 3. Колко е сборът на целите числа, които са по-големи от -21 и по-малки от 19?

А) -39 **Б)** -19 **В)** 0 **Г)** 20

ЗАДАЧА 4. Колко е x, ако $-7{,}3 - x = 8{,}5 + (-0{,}5)$?

А) $-15{,}3$ **Б)** $-0{,}7$ **В)** 0,7 **Г)** 15,3

ЗАДАЧА 5. Кое е неизвестното число x в равенството$7{,}6 + (-5{,}2) = x \, . \, (-2{,}4)$?

....

ЗАДАЧА 9. Колко килограма тежи железен лост с диаметър 52 mm и дължина 2,5 m, ако 1 cm^3 от него тежи 7,8 g?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 4А

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Кое е числото с десетичен запис $2 \,.\, 10^4 + 3 \,.\, 10^2 + 4$?

А) 234 **Б)** 2034 **В)** 2304 **Г)** 20 304

ЗАДАЧА 2. Колко е сборът $1^2 + 2^2 + 5^2$?

А) 15 **Б)** 16 **В)** 30 **Г)** 8^2

ЗАДАЧА 3. На кое от дадените **НЕ** е равно 9^3?

А) 3^6 **Б)** 729 **В)** 3^5 **Г)** 27^2

ЗАДАЧА 4. Пресметнете.

$2^5 =$ ....

$3^4 =$ ....

$5^3 =$ ....

$6^{-2} =$ ....

ЗАДАЧА 5. Кое е неизвестното число x в равенството $18^x = 2^4 \,.\, 3^8$?

....

ЗАДАЧА 6. Пресметнете $\dfrac{49}{7^2 + 6 \,.\, 7^2} + \left(\dfrac{3 \,.\, 4^3 + 4^4}{4^3}\right)^{-1}$.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 4Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Кое е числото с десетичен запис $5 \,.\, 10^3 + 2 \,.\, 10 + 3$?

А) 523 **Б)** 5023 **В)** 5203 **Г)** 50 023

ЗАДАЧА 2. Колко е сборът $2^2 + 3^2 + 4^2$?

А) 18 **Б)** 29 **В)** 9^2 **Г)** 9^6

ЗАДАЧА 3. На кое от дадените **НЕ** е равно 4^3?

А) 2^6 **Б)** 64 **В)** 2^5 **Г)** 8^2

ЗАДАЧА 4. Пресметнете.

$2^6 =$ ....

$5^4 =$ ....

$3^5 =$ ....

$7^{-2} =$ ....

ЗАДАЧА 5. Кое е неизвестното число x в равенството $12^x = 3^4 \,.\, 2^8$?

....

ЗАДАЧА 6. Пресметнете $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{2} + \frac{49}{7^2 + 6.7^2}$.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 5А

Име: ……………………………………………………………………………………………………

ЗАДАЧА 1. Кой от изразите е отношение?

А) $6 + 5$ **Б)** $6 - 5$ **В)** $6 . 5$ **Г)** $6 : 5$

ЗАДАЧА 2. Кое е неизвестното число x в пропорцията $\frac{54}{30} = \frac{x}{5}$?

А) 6 **Б)** 9 **В)** 18 **Г)** 20

ЗАДАЧА 3. Въже с дължина 135 cm е разделено на три части в отношение $4 : 5 : 6$. Колко сантиметра е най-късата част?

А) 9 cm **Б)** 36 cm **В)** 45 cm **Г)** 54 cm

ЗАДАЧА 4. За дезинфекция на басейн с вместимост 2500 L трябват 5 единици хлор. Колко единици хлор трябват за басейн с вместимост 1200 L?

А) 2 **Б)** 2,4 **В)** 5,2 **Г)** 24

ЗАДАЧА 5. Върху карта с мащаб $1 : 1\,000\,000$ разстоянието AB е 17 cm. Колко километра е действителното разстояние между градовете A и B?

……………………………………………………………………………………………………

ЗАДАЧА 6. Лекарство се дозира по правилото: „При всеки прием – по 6 mg на 10 kg“. Ако таблетката е 30 mg, по колко таблетки трябва да приема пациент, който тежи 75 kg?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Тест № 5Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Кой от изразите е отношение?

А) 4 + 3 **Б)** 4 – 3 **В)** 4 : 3 **Г)** 4 . 3

ЗАДАЧА 2. Кое е неизвестното число x в пропорцията $\frac{36}{x} = \frac{4}{9}$?

А) 4 **Б)** 9 **В)** 81 **Г)** 144

ЗАДАЧА 3. Кабел с дължина 165 cm е разделен на три части в отношение 2 : 3 : 6. Колко сантиметра е най-късата част?

А) 15 **Б)** 45 **В)** 66 **Г)** 90

ЗАДАЧА 4. За дезинфекция на басейн с вместимост 3000 L трябват 6 единици хлор. Колко единици хлор трябват за басейн с вместимост 1500 L?

А) 2 **Б)** 2,4 **В)** 3 **Г)** 3,5

ЗАДАЧА 5. Върху карта с мащаб 1 : 100 000 разстоянието AB е 24 cm. Колко километра е действителното разстояние между градовете A и B?

....

ЗАДАЧА 6. Лекарство се дозира по правилото: „При всеки прием – по 4 mg на 10 kg“. Ако таблетката е 20 mg, по колко таблетки трябва да приема пациент, който тежи 75 kg?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 6А (Изходящ тест)

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Кое е вярно?

А) Модулът на всяко рационално число е положително число или нула.
Б) Модулът на всяко рационално число е противоположното му число.
В) Модулът на всяко рационално число е самото число.
Г) Модулът на всяко рационално число е отрицателно число.

ЗАДАЧА 3. Кое е средноаритметичното на числата 1,6; 3,7; 0,8 и 0,5?

А) 1,64 **Б)** 1,6 **В)** 1,65 **Г)** 3,3

ЗАДАЧА 3. Колко е $7^2 - 7 \,.\, 3$?

А) –28 **Б)** –7 **В)** 7 **Г)** 28

ЗАДАЧА 4. На колко е равна степента $2^{(-3)^2}$?

А) 2^{-9} **Б)** 2^{-6} **В)** 2^6 **Г)** 2^9

ЗАДАЧА 5. Колко кубични сантиметра е обемът на кълбо с радиус 6 cm?

А) 72π **Б)** 288π **В)** 864π **Г)** 432π

ЗАДАЧА 6. Колко квадратни сантиметра са лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на правилна четириъгълна призма с основен ръб 7 cm и височина 1,6 dm?

....

ЗАДАЧА 7. Широчината на река била измерена на пет места. Резултатите от четирите измервания са: 5,1 m, 5 m, 5,2 m и 5 m. Ако за широчина на реката е прието средноаритметичното от петте измервания и то е 5,12 m, кой е резултатът от петото измерване?

....

ЗАДАЧА 8. Пресметнете израза $(3 \,.\, x^2 .\, y)^3 : (81 \,.\, x^4 .\, y^{10})$, за $x = 2$, $y = \dfrac{1}{3}$.

....

ЗАДАЧА 6. Какъв е средният месечен доход на човек от четиричленно семейство с две деца, ако месечният доход на бащата е 640 лв., а на майката е 400 лв.?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 9:

....
....
....
....
....
....
....

Тест № 6Б (Изходящ тест)

Име: ………

ЗАДАЧА 1. Кое е вярно?

А) Противоположните числа се различават по модул.
Б) Противоположните числа се различават само по знак.
В) Противоположните числа не се различават.
Г) Противоположните числа се различават по модул и по знак.

ЗАДАЧА 2. Кое е средноаритметичното на числата 0,6; 0,7; 0,8 и 0,5?

А) 0,64 **Б)** 0,6 **В)** 0,65 **Г)** 1,3

ЗАДАЧА 3. Колко е $5^2 - 5 \,.\, 3$?

А) –10 **Б)** –5 **В)** 5 **Г)** 10

ЗАДАЧА 4. На колко е равна степента $3^{(-5)^2}$?

А) 3^{-10} **Б)** 3^{-7} **В)** 3^{10} **Г)** 3^{25}

ЗАДАЧА 5. Колко квадратни сантиметра е повърхнината на сфера с радиус 15 cm?

А) 60π **Б)** 900π **В)** 4500π **Г)** 300π

ЗАДАЧА 6. Колко квадратни дециметра са лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на правилна четириъгълна пирамида с апотема 8,5 dm и основен ръб 42 cm?

………

ЗАДАЧА 7. Широчината на река била измерена на пет места. Резултатите от измерванията на четирите места са: 6,1 m, 6 m, 6,2 m и 6,3 m. Ако за широчина на реката е прието средноаритметичното от петте измервания и то е 6,12 m, кой е резултатът от петото измерване?

………

ЗАДАЧА 8. Пресметнете израза $(3 \,.\, x \,.\, y^2)^3 : (81 \,.\, x^{10} \,.\, y^4)$ за $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$.

………

ЗАДАЧА 9. Какъв е средният месечен доход на човек от четиричленно семейство с две деца, ако месечният доход на бащата е 720 лв., а на майката е 360 лв.?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 9:

………

………

………

………

………

………

………