ЦЯЛ ИЗРАЗ. ЕДНОЧЛЕН. НОРМАЛЕН ВИД НА ЕДНОЧЛЕНА. СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА ЕДНОЧЛЕНИ. ПОДОБНИ ЕДНОЧЛЕНИ

Понякога в числови изрази освен числа може да използваме букви. Буквите в числов израз може да имат различен смисъл:

● Буквите заместват стойност, която се променя. Такива букви наричаме **променливи**. За означаване на променливи обикновено използваме букви от края на латинската азбука: s, t, u, v, x, y, z и т.н.

● Буквите заместват числа, чиято стойност не се променя. Тях наричаме **константи** и за тяхното означаване обикновено използваме букви от началото на латинската азбука: a, b, c, d, e, f, g и т.н. Всички числа също са константи (числови константи).

Когато в израза освен неизвестните и константите има и буква, която може да приема различни стойности от някакво числово множество, наричаме израза **параметричен израз**, а буквата, участваща в него – **параметър**. Всъщност всеки параметричен израз описва едно множество от изрази.

Така може да записваме изрази, чиято стойност зависи от стойностите на променливите, константите и параметрите.

Самите изрази също може да означаваме с букви.

1 Пресметнете стойността на израза $U = a \,.\, x + 4$, за $a = 2$, при $x = 0$ и при $x = 1$.

Решение: Стойността на израза U зависи от променливата x и от константата (параметъра) a. За даденото пресмятане знаем, че a има стойност 2, а x може да приема различни стойности. Понеже a е 2, трябва да пресметнем стойностите на числовия израз $U = 2 \,.\, x + 4$, за $x = 0$ и $x = 1$, т.е. да заместим x със съответните стойности и да пресметнем U.

При $x = 0$ имаме $U = 2 \,.\, 0 + 4 = 4$, а при $x = 1$ имаме $U = 2 \,.\, 1 + 4 = 6$.

Ако U и V са изрази, а n е цяло число, то $U + V$, $U - V$, $U \,.\, V$ и $U : V$ са съответно сума, разлика, произведение и частно на изразите U и V, а U^n е n-та степен на израза U.

Израз, в който има само операциите събиране, изваждане, умножение и деление, но няма променлива в знаменател (делител), наричаме **цял израз**.

Вярно е:

● Всички константи и променливи са цели изрази.

● Сумата, разликата и произведението на цели изрази, както и степента на цял израз с естествен степенен показател е отново цял израз.

За целите изрази са в сила разместителното, съдружителното и разпределителното свойство:

$$\boldsymbol{U+V=V+U;\ U\,.\,V=V\,.\,U;\ (U+V)+W=U+(V+W)=U+V+W;}$$

$$\boldsymbol{(U\,.\,V)\,.\,W=U\,.\,(V\,.\,W)=U\,.\,V\,.\,W;\ (U\pm V)\,.\,W=U\,.\,W\pm V\,.\,W.}$$

Цял израз, който е константа, променлива или произведение на константи и променливи, наричаме **едночлен**.

2 Като използвате разместителното свойство на умножението и правилото за умножение на степени, запишете едночлена $5x \,.\, 2y^2x \,.\, ay$ по различни начини (a – константа).

Решение: Дадения едночлен може да запишем по много различни начини. Например $5x \,.\, 2y^2x \,.\, ay$; $10x \,.\, y^2x \,.\, ay$; $5x^2 \,.\, 2y^3a$; $10ax^2y^3$ и т.н.

Едночленът $10ax^2y^3$ е произведение от константата $10a$ и степени на различните променливи x и y, затова не може да се представи като произведение на по-малък брой множители.

Казваме, че $10ax^2y^3$ е **нормален вид** на едночлена $5x \,.\, 2y^2x \,.\, ay$, а константата $10a$ е **коефициент** на едночлена.

Записваме едночлен в нормален вид, като първо записваме произведението от константите – коефициента на едночлена, а след това записваме степените на различните променливи, като пишем по-напред променлива, която се намира по-напред в азбуката от друга.

3 Запишете в нормален вид и посочете коефициента на едночлена.

а) $6xy^2zx$ б) $-yzxz^3$ в) $\frac{1}{3}ata^2t$

г) $(-5x^2y^2)^2$ д) $3x^3y(-bxy^4)^3$ е) $(-xy)^2(zx)^3$

Сбора от степенните показатели на променливите в едночлен с ненулев коефициент наричаме **степен на едночлена**.

Например едночленът $5x^2y^3z$ е от степен $2 + 3 + 1 = 6$.

Едночлените 6, $-2a^5$ (a – константа) не съдържат променливи. Но тъй като те може да се представят като $6x^0$, $6x^0y^0$, $-2a^5z^0$, $-2a^5x^0y^0z^0$ и т.н., може да смятаме, че са едночлени от **нулева степен**, т.е. **константите са едночлени от нулева степен**.

(4) Определете коефициента и степента на едночлена.

а) x б) -2^3 в) $\frac{1}{3}xx(-x)^2$ г) $3a\,(x^2y^3)^2a^3$ д) $x^2y(-bzt)^3$

Едночлени, нормалният вид на които е един и същ или се различават само по коефициентите си, наричаме **подобни**. В частност всеки едночлен е подобен на себе си.

(5) Кои от дадените едночлени са подобни на едночлена $\frac{1}{2}x^2yz^3$?

а) $-\frac{1}{2}x^2yz^3$ б) $-x^2yz^3$ в) $\frac{1}{3}x^2yz^3$

г) $3xy^2z^3$ д) x^3y^2z е) $a(xz)^2yz$

Събирането (изваждането) на подобни едночлени извършваме по следния начин: първо събираме (изваждаме) коефициентите им, след което записваме подобен едночлен на дадените с коефициент, равен на намереното число ($Ax^ny^mz^k \pm ax^ny^mz^k = (A \pm a)x^ny^mz^k$, където n, m и k са естествени числа), т.е. използваме разпределителното свойство (изнасяме променливите извън скоби).

Подобни едночлени, коефициентите на които са противоположни числа, наричаме **противоположни**.

Така сборът на два противоположни едночлена е равен на нула.

Когато събираме и изваждаме подобни едночлени, казваме, че извършваме **приведение**.

(6) Извършете приведение на подобните едночлени.

а) $5x - 3x + 7x$ б) $6x - 8y + 4x + 8y$

в) $2xxy + 0x^2y - 7x\,.\,2yx$ г) $\frac{1}{2}xy + 5yx - 0{,}5xy + xy$

д) $-9x^2z + 6xz^2 + 9xz^2 - x^2z$ е) $12(xy)^2 - 5x^2(-y)^2 - 2x(y^2)x$

УМНОЖЕНИЕ, СТЕПЕНУВАНЕ И ДЕЛЕНИЕ НА ЕДНОЧЛЕНИ

При умножаване, степенуване и деление на едночлени с коефициентите им извършваме означените действия, а за променливите прилагаме съответните правила за действия със степени.

Ако $U = Ax^ny^mz^k$ и $V = ax^py^qz^r$, то
$U\,.\,V = (A\,.\,a)x^{n+p}y^{m+q}z^{k+r}$,
$U : V = (A : a)x^{n-p}y^{m-q}z^{k-r}$,
$U^s = (Ax^ny^mz^k)^s = (A^s)x^{ns}y^{ms}z^{ks}$,
където n, m, k, p, q, r и s са естествени числа.

Произведението на едночлени и степен на едночлен със степенен показател естествено число винаги е едночлен (степенните показатели на променливите са естествени числа или нула).

Частното на едночлени невинаги е едночлен (степенният показател на някои от променливите може да е цяло отрицателно число).

(1) Намерете $U\,.\,V$, $U : V$ и $V : U$, ако:

а) $U = 5x^4y^3z$, $V = x^2yz$; б) $U = 15x^3yt^5$, $V = 5x^4yt^4$.

(2) Извършете степенуването.

а) $\left(-2x^2y^2\right)^2$ б) $\left(-\frac{1}{5}x^2y^3\right)^3$ в) $\left(\frac{1}{2}xy^2t^3\right)^2$ г) $\left(2aaxyx^2y\right)^3$

(3) Намерете неизвестния едночлен.

а) $-4xyz + U = 5xyz$ б) $U\,.\,6x^3y^2 = 18x^6y^3$

Решение: При намиране на неизвестен едночлен използваме правилата за намиране на неизвестно число, т.е. към двете страни на равенството може да прибавяме един и същ израз и двете страни на равенството може да умножаваме с един и същ израз, различен от нула.

Последователно получаваме:

а) $-4xyz + U = 5xyz$; $U = 5xyz + 4xyz$; $U = 9xyz$;

б) $U\,.\,6x^3y^2 = 18x^6y^3$; $U = 18x^6y^3 : 6x^3y^2$; $u = 3x^3y$ при $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

(4) За коя стойност на параметъра a при $x = -2$ изразът $U = ax^3 + xx - 2x^2$ приема стойност -3?

МНОГОЧЛЕН. НОРМАЛЕН ВИД НА МНОГОЧЛЕН. СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА МНОГОЧЛЕНИ

Израз, който е сбор от едночлени, наричаме **многочлен (полином)**.

Числената стойност на многочлен пресмятаме, като променливите и константите в него заместим с числените им стойности и извършим означените действия.

1 Запишете многочлена като сбор от едночлени в нормален вид, които не са подобни.

а) $U = 3x^3 + 5x^2 - 2$ б) $V = 5t^6 - 4t^6 - t^2 + 3t^2 - 1$

в) $W = -3x(xy) - 6x^2 - 4x(-2xy) + 3$

Решение: а) Едночленът $U = 3x^3 + 5x^2 - 2$ се състои от едночлени в нормален вид, които не са подобни.

б) Извършваме приведение: $V = 5t^6 - 4t^6 - t^2 + 3t^2 - 1 = t^6 + 2t^2 - 1$.

в) Записваме едночлените в нормален вид и извършваме приведение:
$W = -3x(xy) - 6x^2 - 4x(-2xy) + 3 = -3x^2y - 6x^2 + 8x^2y + 3 = 5x^2y - 6x^2 + 3$.

Даден многочлен е в **нормален вид**, когато е сбор от неподобни едночлени в нормален вид. Когато запишем даден многочлен в нормален вид, казваме, че го **привеждаме в нормален вид**.

2 Приведете многочлена в нормален вид.

а) $5xx(-x) + 2(-x)^3 + x^3 + 2$ б) $4ab + 3a^2b + 3a(-ab) + ab$

в) $ax(-2x) + 3xx + 2a^2x + 3a(-a)$

Решение: в) $ax(-2x) + 3xx + 2a^2x + 3a(-a) = -2ax^2 + 3x^2 + 2a^2x - 3a^2$
$= (3 - 2a)x^2 + 2a^2x - 3a^2$
($3x^2$ и $-2ax^2$ са подобни едночлени и сборът им е $(3 - 2a)x^2$.)

В зависимост от броя на едночлените в тях нормалните многочлени са **двучлени**, **тричлени** и т.н.

3 Намерете числената стойност на многочлена:

а) $U = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ за $x = -1$ и за $x = 0$;

б) $U = 2x(-xy) + 3x^2y - 4xy^2 + 3y(-xy)$ за $x = 1$ и $y = -1$.

Упътване. б) Първо опростете многочлена. След това заместете с дадените стойности на x и y .

Най-високата от степените на едночлените в многочлен, записан в нормален вид, наричаме **степен** на многочлена.

Прието е в нормалния вид на многочлен на една променлива да подреждаме едночлените по степените на променливата. Коефициентите пред едночлените наричаме **коефициенти на многочлена**, коефициента пред най-високата степен на променливата – **старши коефициент**, а коефициента пред нулевата ѝ степен – **свободен член на многочлена**.

4 Подредете всеки многочлен по степените на x. Определете неговия старши коефициент и свободния му член (a – параметър).

а) $20x^5 - 3x^4 + x^6 - 3x^5 + 3$ б) $(a - 1)x^2 - 3x + 4x^2 - 5$

Решение: Правим приведение и подреждаме степените в низходящ ред.

а) $20x^5 - 3x^4 + x^6 - 3x^5 + 3 = x^6 + 17x^5 - 3x^4 + 3 = 1x^6 + 17x^5 - 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 3$, т.е. старшият коефициент е 1, а свободният член е 3.

б) $(a - 1)x^2 - 3x + 4x^2 - 5 = (a - 1 + 4)x^2 - 3x - 5 = (a + 3)x^2 - 3x - 5$, т.е. при $a = -3$ имаме $-3x - 5$, а при $a \neq -3$ имаме $(a + 3)x^2 - 3x - 5$.

Така при $a = -3$ за старшия коефициент и свободния член имаме съответно -3 и -5, а при $a \neq -3$ имаме $(a + 3)$ и -5.

Събираме (изваждаме) многочлени, като поставяме двата многочлена в скоби, след което ги свързваме със знака „+“ (знака „–“) и разкриваме скобите (когато пред скобата има знак „+“, запазваме коефициентите на едночлените, а когато има знак „–“, сменяме коефициентите им с противоположните). Накрая привеждаме получения многочлен в нормален вид.

5 Представете в нормален вид.

а) $(5x - 1) + 4x$; $(13{,}2x - 4) - (-0{,}2x + 4)$

б) $(6x + a) + 9a$; $(6x - a^2) - (-3x - 2a^2)$

в) $(5x^2 + x - 5) - (-4x + 5)$; $(-6x^2 - ax + 9) + (ax^2 + ax + 6)$

6 Дадени са многочлените $U = 2xy - 3x^2 + 5x$, $V = -xy + x^2 - x$ и $W = -xy + 2x^2 + 6x$. Приведете в нормален вид:

а) $U + V + W$; б) $U + V - W$; в) $U - V + W$; г) $U - (V + W)$.

7 За $x = -2$ намерете числената стойност на израза

$$x^3 - (x^2 + 2) - (-x^2 - 2).$$

УМНОЖЕНИЕ НА МНОГОЧЛЕН С ЕДНОЧЛЕН. УМНОЖЕНИЕ НА МНОГОЧЛЕН С МНОГОЧЛЕН

За целите изрази е в сила разпределителното свойство, или по-точно:

$$(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\,.\,\boldsymbol{W}=\boldsymbol{U}\,.\,\boldsymbol{W}+\boldsymbol{V}\,.\,\boldsymbol{W}\ \left(=\boldsymbol{W}\,.\,(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\right),$$

където U, V, W са едночлени. Това свойство може да се обобщи и за многочлен с повече от два члена.

Умножаваме многочлен с едночлен, като първо всеки член на многочлена умножим с едночлена, след което събираме получените едночлени. Така произведението на едночлен с многочлен (многочлен с едночлен) е многочлен.

1 Запишете с многочлен произведението $U\,.\,V$, ако:
а) $U = 3x^2$, $V = x^3 - 4x^2 + 5$; б) $U = -3x^2 + x - 2$, $V = 2x^4$.

Решение: Ще използваме, че при умножаването на многочлени, както и при числови изрази, е вярно разпределителното свойство:
а) $U\,.\,V = 3x^2\,.\,(x^3 - 4x^2 + 5) = 3x^2\,.\,x^3 - 3x^2\,.\,4x^2 + 3x^2\,.\,5 = 3x^5 - 12x^4 + 15x^2$;
б) $U\,.\,V = (-3x^2 + x - 2)\,.\,2x^4 = -3x^2\,.\,2x^4 + x\,.\,2x^4 - 2\,.\,2x^4 = -6x^6 + 2x^5 - 4x^4$.

2 Извършете умножението.
а) $7\,.\,(6x-3)$; $-5\,.\,(4-3x)$; $(-2x-5)\,.\,(-4)$
б) $(-4x-2)\,.\,7x^3$; $(-9{,}2x-4)\,.\,(-5x^4)$
в) $y^2\,.\,(y^2+y-1)$; $(-z^2-3z+5)\,.\,(-2z^3)$
г) $y\,.\,(x^2-y^2+2)$; $(-x^2z+xz^2-3)\,.\,(-xy)^3$

3 Опростете израза.
а) $5x^2 - 4x(x-1)$ б) $-3(a+b) + 2(a-b)$
в) $x(x^2-y) - y(y^2-x)$ г) $axz(z-2) + (2z-3z^2)ax$

Като използваме отново разпределителното свойство, получаваме:

$$(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\,.\,(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\,.\,\boldsymbol{S}+(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\,.\,\boldsymbol{T}=\boldsymbol{US}+\boldsymbol{VS}+\boldsymbol{UT}+\boldsymbol{VT}$$

$$\left(=\boldsymbol{U}\,.\,(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})+\boldsymbol{V}\,.\,(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})\right),$$

където U, V, S, T са едночлени. Това свойство може да обобщим и за многочлен с повече от два члена.

Умножаваме многочлен с многочлен, като първо умножаваме всеки член на единия многочлен с всеки член на другия, след което събираме получените едночлени.

За действията с многочлени са изпълнени свойствата:
$U + V = V + U$, $U\,.\,V = V\,.\,U$ – **разместително**;
$(U + V) + W = U + (V + W)$, $(U\,.\,V)\,.\,W = U\,.\,(V\,.\,W)$ – **съдружително**;
$(U + V)W = U\,.\,W + V\,.\,W$, $(U - V)W = U\,.\,W - V\,.\,W$ – **разпределително**.

4 Пресметнете.
а) $(a-2)(a+1)$, $(2x-3)(1-x)$, $(2a-3b)(2a+2)$
б) $(x^2-x)(x+x^2)$, $(a^3-1)(a^3+1)$, $(4x-y^2)(4x+y^2)$
в) $(x^2-x+1)(x+1)$, $(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $(2-x^2)(4x^2-x+1)$
г) $(a+b-c)(a-b-c)$, $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$
д) $(a-b)^2$, $(x+2)^3$, $(a-b+c)^2$

Решение: д) $(a-b+c)^2 = (a-b+c)(a-b+c) = aa - ab + ac - ba + bb - bc + ca - cb + cc = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

Повече от два многочлена умножаваме последователно, в подходящ ред. Целесъобразно е след всяко умножение да правим приведение.

5 Опростете.
а) $(x+3)(-x)(x-3) - x(9-x^2)$
б) $3x(x^2+1)(x-1) - x^3(x^2-3x)$
в) $(2x-5)(2x-5)(2x+5) - 4x^2(2x-5)$
г) $(a-1)(a+1)(a^2+1) + a^2(1-a^2)$

6 Извършете умножението.
а) $(a+7)(a-4)$ б) $(2x-3y)(3x+2y)$
в) $(4x^2-y)(4x^2+y)$ г) $(x^2+2z^2)(2x^2-z^2)$
д) $(2x-1)(4x^2-2x+1)$ е) $(x^2-x+1)(-x-1)$
ж) $(x^2-x-1)(x^2+x+1)$ з) $-2(x^2+1)(x^4-x^2+1)\frac{3}{2}x$

ТЪЖДЕСТВЕНИ ИЗРАЗИ

Два цели израза наричаме **тъждествено равни (тъждествени, равни)**, ако за всички стойности на променливите в тях съответните им числени стойности са равни.

Понеже не може да направим проверки за всички стойности на променливите, установяваме равенството на изрази въз основа на правилата за действия с изрази.

Замяната на израз с тъждествено равен на него израз наричаме **тъждествено преобразуване (преобразуване)** на израза.

(1) Сравнете стойностите на изразите $U = -x(5 - 2x)$ и $V = 2x^2 - 5x$ за произволна стойност на променливата x.

Решение: За произволна стойност на x, използвайки разпределителното свойство на умножението и разместителното свойство на събирането, имаме: $U = -x(5 - 2x) = -5x + 2x^2 = 2x^2 - 5x = V$, т.е. двата израза са тъждествено равни.

(2) Тъждествени ли са изразите? Обяснете отговора си.

а) $5(2x + 3y)$ и $10x + 15y$ б) $-2(x - 3) + 5$ и $-2x - 1$

Равенство, двете страни на което са тъждествено равни изрази, наричаме **тъждество**.

(3) Тъждество ли е равенството?

а) $b(a - a) = 0$ б) $5t - 45 = 5(t - 9)$ в) $-8(3 - x) + 4 = 8x - 20$

Свойствата на целите изрази са всъщност **основни тъждества**:

разместително свойство: $U + V = V + U$, $U \,.\, V = V \,.\, U$;

съдружително свойство: $(U + V) + W = U + (V + W)$,
$(U \,.\, V) \,.\, W = U \,.\, (V \,.\, W)$;

разпределително свойство: $(U \pm V)W = UW \pm VW$,
$(U \pm V) : W = U : W \pm V : W$, $(W \neq 0)$;
$U + 0 = 0 + U = U$,
$U \,.\, 0 = 0 \,.\, U = 0$,
$1 \,.\, U = U \,.\, 1 = U$.

Равенството на изрази притежава следните свойства:

Всеки израз е тъждествено равен на себе си: $U = U$ – **рефлексивност**.

Ако $U = V$, то $V = U$ – **симетричност**.

Ако $U = V$ и $V = W$, то $U = W$ – **транзитивност**.

Ако $U = V$, то $U - V = 0$, и обратно.

Установяването на верността на дадено твърдение или равенство наричаме **доказване** на твърдението или равенството.

(4) Докажете тъждествата.

а) $3y = 6x + 3(y - 2x)$

б) $11 - 5x - (2 - 8x) = 6(x + 1) - 3(x - 1)$

в) $8 - 4x = 4(2 - x)$

Решение: а) Преобразуваме дясната страна на равенството, докато получим лявата.

$6x + 3(y - 2x) = 6x + 3y - 6x = 3y$

б) Преобразуваме двете страни на равенството, докато получим един и същ израз.

$11 - 5x - (2 - 8x) = 11 - 5x - 2 + 8x = 9 + 3x$

$6(x + 1) - 3(x - 1) = 6x + 6 - 3x + 3 = 9 + 3x$

в) Преобразуваме разликата на двата израза и доказваме, че тя е нула.

$(8 - 4x) - 4(2 - x) = 8 - 4x - 8 + 4x = 0$

Ако за някоя стойност на променливите стойностите на два израза са различни, изразите не са тъждествени.

(5) Тъждество ли е равенството $x(x - 1) = x^2$?

Решение: Трябва да проверим дали равенството $x(x - 1) = x^2$ е вярно за всяка стойност на неизвестното.

I начин: Лявата страна $x(x - 1) = x^2 - x$ не е равна на дясната страна x^2. Следователно равенството не е тъждество.

II начин: За $x = 1$ изразите $x(x - 1)$ и x^2 приемат различни числени стойности $1 \,.\, (1 - 1) = 0$ и $1 = 1$, т.е. равенството не е тъждество.

(6) Кои от равенствата са тъждества?

а) $x + 3(x - 1) = 4x - 3$ б) $x(-1 + x) - x^2 = x$

в) $2x = x(x - 2) - x^2$ г) $(x + 4) = x^2 - 6x + 9$

д) $x(-3 + x) = 3x + x^2$ е) $3(-x - 5) + 4 = -2(x + 1) - x - 9$

ТЪЖДЕСТВАТА $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(1) Представете с нормален многочлен степента $(a + b)^2$.

Решение: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Когато пресмятаме квадрата на двучлен, може всеки път да постъпваме както по-горе. Но може и да запомним получената формула и да я прилагаме наготово за произволни изрази a и b.

Сбор на два израза повдигаме на квадрат, като съберем квадрата на първия израз, удвоеното произведение на двата израза и квадрата на втория израз.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Подобна е и формулата за квадрата на разликата на два израза.

Разлика на два израза повдигаме на квадрат, като от квадрата на първия израз извадим удвоеното произведение на двата израза и накрая прибавим квадрата на втория израз.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Формулите за квадрат на сбор или разлика записваме заедно така:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Получените тъждества се помнят лесно и ни помагат при опростяване на изрази. Наричаме ги **формули за съкратено умножение**.

(2) Като използвате формулата за квадрат на двучлен, пресметнете.
а) 51^2 и 69^2 б) 75^2; 95^2 и 115^2

Решение: а) $51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 . 50 . 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$
$69^2 = (70 - 1)^2 = 70^2 - 2 . 70 . 1 + 1^2 = 4900 - 140 + 1 = 4761$;
б) $75^2 = (70 + 5)^2 = 70^2 + 2 . 70 . 5 + 5^2 = 70 . (70 + 10) + 25$
$= 70 . 80 + 25 = (7 . 8) . 100 + 25 = 5625$;
$95^2 = (90 + 5)^2 = 90^2 + 2 . 90 . 5 + 5^2 = 90 . (90 + 10) + 25$
$= 90 . 100 + 25 = (9 . 10) . 100 + 25 = 9025$
Каква закономерност забелязвате?
По откритото правило пресметнете устно 35^2, 45^2, 105^2.

(3) След степенуване определете степента на многочлена.
а) $(x - 2)^2$ б) $(x + 3y)^2$ в) $(x^3 - 4)^2$ г) $(x^2 - 2yz)^2$

ТЪЖДЕСТВОТО $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(1) Представете с нормален многочлен произведението
$(a + b)(a - b)$.

Решение: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Произведение на сбор и разлика на два израза пресмятаме, като от квадрата на първия израз извадим квадрата на втория израз.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

(2) Представете с нормален многочлен.
а) $(1 + x)(x - 1)$, $\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right)$, $(0{,}2 + b)(0{,}2 - b)$
б) $(x + 6y)(x - 6y)$, $(5x + 2y)(5x - 2y)$, $(a^2 - 2)(a^2 + 2)$

Решение: б) $(5x + 2y)(5x - 2y) = (5x)^2 - (2y)^2 = 25x^2 - 4y^2$

(3) Пресметнете, като използвате формулата за **сбор по разлика**.
а) $51 . 49$ б) $45 . 35$ в) $102 . 98$ г) $30\frac{1}{2} . 29\frac{1}{2}$

Решение: в) $102 . 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 10\,000 - 4 = 9996$;
г) $30\frac{1}{2} . 29\frac{1}{2} = \left(30 + \frac{1}{2}\right)\left(30 - \frac{1}{2}\right) = 30^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 900 - \frac{1}{4} = 899\frac{3}{4}$

(4) Представете с нормален многочлен.
а) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$ б) $(b^2 - 2)(b^2 + 2)(b^4 - 4)$
в) $(2a + b)(4a^2 + b^2)(2a - b)$ г) $(a - 3)^2(a + 3)^2$
д) $(x + 4)^2(4 - x)^2$ е) $(-3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)(-3x + 2y)$

Решение: е) $(-3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)(-3x + 2y) = (-3x + 2y)(-3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)$
$= ((-3x)^2 - (2y)^2)(9x^2 + 4y^2) = (9x^2 - 4y^2)(9x^2 + 4y^2) = 81x^4 - 16y^4$

(5) Умножете.
а) $(a + b - c)(a + b + c)$, $(a + b + c)(a - b - c)$
б) $(2 - x + y)(2 + x - y)$, $(-x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1)$

Решение: б) $(-x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) = (-1 - (x^2 + 2x))(-1 + x^2 + 2x)$
$= (-1)^2 - (x^2 + 2x)^2 = 1 - x^4 - 4xx^2 - 4x^2 = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$

ТЪЖДЕСТВАТА $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

(1) Представете с нормален многочлен степента $(a + b)^3$.

Решение: $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Сбор на два израза повдигаме на куб, като съберем куба на първия израз, утроеното произведение на квадрата на първия израз и втория израз, утроеното произведение на първия израз и квадрата на втория израз и куба на втория израз.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Подобна е и формулата за куба на разлика на два израза.

Разлика на два израза повдигаме на куб, като от куба на първия израз извадим утроеното произведение на квадрата на първия израз и втория израз, след това прибавим утроеното произведение на първия израз и квадрата на втория израз и накрая извадим куба на втория израз.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Двете формули се различават само по знаците на едночлените си, съдържащи нечетна степен на b. Записваме ги заедно така:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

(2) Представете с многочлени в нормален вид.

а) $(1 - x)^3$, $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3$, $(x - 0{,}2)^3$ б) $(3a + 2b)^3$, $(ab - 1)^3$, $(2ab + 3c)^3$

в) $(1 + x)^3$, $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^3$, $(x + 0{,}3)^3$ г) $(2a - 3b)^3$, $(ab + 2)^3$, $(3ab - 2c)^3$

(3) Докажете тъждествата.

а) $(ax + ay)^3 = a^3(x + y)^3$, $(-x - y)^3 = -(x + y)^3$

б) $(-ax + ay)^3 = -a^3(x - y)^3$, $(-x + y)^3 = -(x - y)^3$

Доказателство. б) $(-ax + ay)^3 = (-a(x - y))^3 = (-a)^3(x - y)^3 = -a^3(x - y)^3$

Второто тъждество се получава от първото при $a = 1$.

ТЪЖДЕСТВАТА $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

(1) Докажете тъждеството $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Решение: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$

Изразът $a^2 \pm ab + b^2$ прилича на **пълния квадрат** $a^2 \pm 2ab + b^2$, но се различава от него по това, че вместо удвоеното произведение на a и b има само произведението им. Затова го наричаме **непълен квадрат** на сбора (разликата) на a и b.

Сбора на кубовете на два израза намираме, като умножим сбора на изразите по непълния квадрат на разликата им.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Подобна е и формулата за разликата на кубовете на два израза.

Разликата на кубовете на два израза намираме, като умножим разликата на изразите по непълния квадрат на сбора им.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Двете формули се различават само по знаците на едночлените си, съдържащи нечетна степен на b. Записваме ги заедно така:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

(2) Запишете с нормални многочлени.

а) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$, $(4 + p)(16 - 4p + p^2)$, $(9 - 6x + 4x^2)(3 + 2x)$

б) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$, $(3 - b)(b^2 + 3b + 9)$, $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

(3) Докажете тъждеството.

а) $(-a - b)(a^2 - ab + b^2) = -a^3 - b^3$

б) $(-a + b)(a^2 + ab + b^2) = b^3 - a^3$

в) $(-a - b)(a^2 - ab + b^2) = -(a^3 + b^3)$

г) $(-a + b)(-a^2 - ab - b^2) = a^3 - b^3$

(4) Опростете израза.

а) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - 64$

б) $2x^3 - (x^2 + 2x + 4)(x - 2)$

в) $(x - 3)^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

г) $(a - b)(a + ab + b) - a(a - b)(a + b)$

д) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$

е) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x^3 + y^3)$

РАЗЛАГАНЕ НА МНОГОЧЛЕНИ НА МНОЖИТЕЛИ

Когато представяме многочлен като произведение на едночлени и многочлени, казваме, че **разлагаме многочлена на множители**.

Разлагането на многочлен на множители може да стане с различни методи, които може да комбинираме. Методите са:

● **Изнасяне на общ множител извън скоби** – от разпределителното свойство $(U + V)W = UW + VW$ следва, че $UW + VW = (U + V)W$.

● **Разлагане чрез формулите за съкратено умножение** – в изучените до момента тъждества (за квадрат и куб на сбор (разлика) на два многочлена, за разлика на квадрати, за сбор и разлика на кубове) вместо съответния сбор от многочлени записваме квадрата, куба или произведението.

● **Разлагане чрез групиране** – разделяме многочлените на групи така, че във всяка група да може или да изнесем общ множител, или да приложим някоя формула, след което (групирали сме така, че да е възможно) изнасяме общ множител от всички групи.

При **разлагане на многочлен чрез изнасяне на общ множител** от всеки едночлен на многочлена изнасяме извън скоби едночлен. Всяка променлива или константа в него трябва да е участвала във всички едночлени и степента ѝ да е най-ниската от степените ѝ в едночлените. Коефициентът трябва да е най-големият общ делител на коефициентите на всички едночлени, ако тези коефициенти са цели числа.

1 Разложете многочлена на множители.

а) $3x + 12y$ б) $x^4 + x^3$ в) $10a^2 + 15a^3$
г) $6a^2b + 15ab^2$ д) $8x^4 - 12x^3 + 16x^5$

Решение: а) НОД(3; 12) = 3, а най-ниските степени на x и y във всяко от двете събираеми са нули. Затова $3x + 12y = 3x + 3 \,.\, 4y = 3(x + 4y)$.

б) Най-ниската от степените на x във всяко от събираемите е x^3 и $x^4 + x^3 = x^3 \,.\, x + x^3 \,.\, 1 = x^3(x + 1)$.

в) Най-ниската от степените на a във всяко от събираемите е a^2, а НОД(10; 15) = 5 и $10a^2 + 15a^3 = 2 \,.\, 5a^2 + 3 \,.\, 5a^2 \,.\, a = 5a^2(2 + 3a)$.

г) НОД(6; 15) = 3, а a и b са най-ниските от степените им в събираемите.

$6a^2b + 15ab^2 = 2a \,.\, 3ab + 5b \,.\, 3ab = 3ab(2a + 5b)$

д) $8x^4 - 12x^3 + 16x^5 = 4x^3(2x - 3 + 4x^2)$

2 Разложете на множители и направете проверка.

а) $12a + 12b$, $4b - 4$, $-a + ax$, $ab - b$
б) $7ax + 7bx$, $27ab - 9a$, $36axy + 4ay$, $51xt - 17t$
в) $14a - 21a$, $42a^2b - 28a^3b^2$, $72ab^3c - 48a^2b^2$

Решение: а) $4b - 4 = 4b - 4 \,.\, 1 = 4(b - 1)$; $-a + ax = (-1) \,.\, a + ax = a(-1 + x)$

3 Разложете на множители.

а) $7x(2 - x^2) - 3y(x^2 - 2)$ б) $xy(x - y) + (y - x)$
в) $4(x - y)^2 + (y - x)^3$ г) $3a(x - y) - 2(y - x)a$
д) $(a - b)x + (b - a)x^2 - (a - b)$

4 Докажете тъждеството.

а) $a(b - x) + x(a + b) = b(a + x)$ б) $c(y - 2) + 2(y + c) = y(c + 2)$
в) $a(a - b) + 2ab = a(a + b)$

Решение: а) $a(b - x) + x(a + b) = ab - ax + xa + xb = ab + xb = b(a + x)$

5 Намерете числената стойност на израза.

а) $7{,}39x - x^2$, за $x = 6{,}39$ б) $333x^2 - x$, за $x = \dfrac{1}{333}$
в) $a^2y + a^3$, за $a = -2{,}5$, $y = -7{,}5$ г) $-x^2 - xy$, за $x = 95{,}44$, $y = 4{,}56$
д) $(x - 2)(x + 5) - (x - 2)(x + 4)$, за $x = 2{,}5$

Упътване. Разложете на множители и заместете числените стойности.

6 Представете като произведение от два еднакви двучлена.

а) $100a^2 + 20ab + b^2$ б) $81x^4 - 36x^2 + 4$
в) $1 + y^2 - 2y$ г) $28xy + 49x^2 + 4y^2$
д) $-42a^2b^2 + 49a^4 + 9b^4$ е) $0{,}09 + 0{,}25a^2 - 0{,}3a$

7 Разложете на множители.

а) $18x^3 + 12x^2 + 2x$ б) $10x^3 - 90x$ в) $24x^4 - 81x$

Решение: а) $18x^3 + 12x^2 + 2x = 2x(9x^2 + 6x + 1) = 2x((3x)^2 + 2 \,.\, 3x \,.\, 1 + 1^2)$
$= 2x(3x + 1)^2$

б) $10x^3 - 90x = 10x(x^2 - 9) = 10x(x^2 - 3^2) = 10x(x + 3)(x - 3)$

в) $24x^4 - 81x = 3x(8x^3 - 27) = 3x((2x)^3 - 3^3) = 3x(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

8 Разложете.

а) $ab^3 - 2b^3 + ab^2c - 2b^2c$ б) $a^2 - c^2 + b^2 - 2ab$

Решение: а) $ab^3 - 2b^3 + ab^2c - 2b^2c = b^2(ab - 2b + ac - 2c)$
$= b^2((ab + ac) + (-2b - 2c)) = b^2(a(b + c) - 2(b + c)) = b^2(b + c)(a - 2)$;

б) $a^2 - c^2 + b^2 - 2ab = (a^2 - 2ab + b^2) - c^2 = (a - b)^2 - c^2 = (a - b + c)(a - b - c)$

ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ. ЕКВИВАЛЕНТНИ УРАВНЕНИЯ

Числото, което получаваме при извършване на действията в числов израз U, наричаме (числена) *стойност* на израза U.

Когато стойностите на изразите U и V са равни, казваме, че **равенството $U = V$ е вярно**.

Когато стойностите на изразите U и V не са равни, казваме, че **равенството $U = V$ не е вярно**. Записваме $U \neq V$.

Верните числови равенства имат следните основни свойства:

- $\boldsymbol{U = U}$, т.е. всеки израз е равен на себе си;
- ако $\boldsymbol{U = V}$, то $\boldsymbol{V = U}$, т.е. ако един израз е равен на друг, вторият също е равен на първия;
- ако $\boldsymbol{U = V}$ и $\boldsymbol{V = W}$, то $\boldsymbol{U = W}$, т.е. ако два израза поотделно са равни на трети, те са равни и помежду си.

Като приложим правилата за действия с изрази, може да докажем и следните свойства на верните равенства:

- ако $\boldsymbol{U = V}$, то $\boldsymbol{U + W = V + W}$ и $\boldsymbol{U - W = V - W}$, т.е. ако към равни изрази прибавим или извадим от тях един и същ израз, ще получим пак равни изрази;
- ако $\boldsymbol{U = V}$ и $a \neq 0$, то $a\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{U} : a = \boldsymbol{V} : a$, т.е. ако двете страни на равни изрази умножим или разделим с едно и също число (различно от нула), ще получим пак равни изрази.

Така изразите $\boldsymbol{U = V}$, $\boldsymbol{U + W = V + W}$ и $a\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{V}$ $(a \neq 0)$ са едновременно верни или неверни.

Също така $\boldsymbol{U - V = W}$ и $\boldsymbol{U = W + V}$ са едновременно верни или неверни.

Равенство на изрази с една променлива наричаме **уравнение с една променлива** или **уравнение с едно неизвестно**.

(1) Уравнение с една променлива ли е равенството?
а) $5 \,.\, 7 - 1{,}5 \,.\, 2 = 32$ б) $5y - 4 = 8y + 7$ в) $x - 8y = 12$

Когато в уравнение заместим променливата x с конкретно число, ще получим или вярно, или невярно числово равенство. Например, ако в уравнението $2x + 3 = 4x + 1$ заместим x с 1, ще получим вярното числово равенство $2 \,.\, 1 + 3 = 4 \,.\, 1 + 1$. Казваме, че $x = 1$ **е решение** на уравнението $2x + 3 = 4x + 1$.

Ако заместим x с -2, ще получим невярното числово равенство $2(-2) + 3 = 4(-2) + 1$. Казваме, че $x = -2$ **не е решение** на уравнението.

Решение на уравнение с едно неизвестно наричаме такава стойност на променливата, за която в уравнението получаваме вярно числово равенство.

(2) Решение ли е числото 2 на уравнението?
а) $3(x - 1) + 1 = 2x$ б) $x - 3x = 1$

(3) Намерете решението на уравнението.
а) $x + 4 = -7$ б) $1 \,.\, x = x$ в) $0 \,.\, t = 12$

Решение: а) Равенството $x + 4 = -7$ е вярно за $x = -7 - 4 = -11$.

б) Тъй като за всяка стойност на променливата $1 \,.\, x = x$, всяко число е решение на уравнението.

в) Понеже за всяка стойност на t: $0 \,.\, t = 0 \neq 12$, уравнението $0 \,.\, t = 12$ не може да е вярно за никоя стойност на променливата, т.е. няма решение.

Уравнението $0 \,.\, t = 0$ има за решение всяка стойност на променливата t.

Да решим едно уравнение, означава да намерим всичките му решения или да установим, че то няма решения.

Две уравнения са **равносилни**, ако имат едни и същи решения или и двете нямат решения.
Равносилността на две уравнения означаваме със знака $\Leftrightarrow$.

За да проверим дали две уравнения са равносилни, не е нужно винаги да намираме решенията им. Може да използваме твърдения, които са следствия от свойствата на числовите изрази и верните числови равенства. Тези твърдения може да използваме, без да е нужно всеки път да ги доказваме отново. Наричаме ги **теореми**.

Теорема 1. **(Теорема за заместване).** Ако заместим израз в уравнение с тъждествено равен на него израз, ще получим уравнение, равносилно на даденото.

4 Равносилни ли са уравненията и ако да, защо?

а) $5(2-x)=1$ и $10-5x=4$

б) $(x+2)(x-2)=x^2+x$ и $x^2-4=x^2+x$

в) $3(2-x)=4(3x-1)$ и $6-3x=12x-4$

Теорема 2. **(Теорема за прехвърляне).** Ако прехвърлим израз от едната страна на уравнение в другата му страна с противоположен знак, ще получим уравнение, равносилно на даденото.

5 Обяснете защо са равносилни уравненията.

а) $x+1=5-(x+1)$ и $x+1+(x+1)=5$

б) $x+4=-7$ и $x=-4-7$

в) $2x^2=-x^2+27$ и $2x^2+x^2=27$

г) $5+x=4+2x$ и $5-4=2x-x$

6 Дадено е уравнението $3x+5(x-2)=4x$. Съставете уравнение, равносилно на даденото, по:

а) Теорема 1; б) Теорема 2.

7 Кое от уравненията $4(x-1)=x-3$ и $-3x+6x+4-8=0$ е равносилно на уравнението $3x=4$?

Теорема 3. **(Теорема за умножение или деление с число).** Ако двете страни на уравнение умножим (разделим) с различно от нула число, ще получим уравнение, равносилно на даденото.

8 Съставете три уравнения (по едно за всяка от теоремите), които имат единствено решение:

а) -3; б) $0{,}5$.

Равносилни ли са трите уравнения?

9 Равносилни ли са уравненията и ако да, защо?

а) $(x-3)^2+8=x$ и $x^2-6x+9+8=x$

б) $8x-4=9-7x$ и $8x+7x=9+4$

в) $x+1-5=3x$ и $1-5=3x-x$

г) $6(x-4)+3=9(1-x)$ и $2x-8+1=3-3x$

д) $5(x-1)=7(x+2)$ и $-19=2x$

10 Решете уравнението, като посочите използваните теореми за равносилност.

а) $5x-4x=6$ б) $x-1{,}5=0{,}5$

в) $2x=3x-6$ г) $2+x=2x+1$

Решение: а) $5x-4x=6 \Leftrightarrow$ (Т1) $x=6$;

б) $x-1{,}5=0{,}5 \Leftrightarrow$ (Т2) $x=1{,}5+0{,}5 \Leftrightarrow$ (Т1) $x=2$;

в) $2x=3x-6 \Leftrightarrow$ (Т2) $6=3x-2x \Leftrightarrow$ (Т1) $6=x$ или $x=6$;

г) $2+x=2x+1 \Leftrightarrow$ (Т2) $2-1=2x-x \Leftrightarrow$ (Т1) $1=x$, $x=1$

11 Като запишете използваните теореми за равносилност, решете уравнението.

а) $9t-8t=2$ б) $1-z=7{,}2$

в) $6{,}5y-3=5{,}5y+1$ г) $4-5x=x-3$

Уравнение от вида $ax+b=0$, където a и b са константи, а x е променлива, наричаме **линейно уравнение с едно неизвестно**.

Тук неизвестното x е от първа степен, a е коефициентът пред неизвестното, а b е свободният член.

За уравнението $ax+b=0$, при $a\neq 0$, имаме $ax+b=0 \Leftrightarrow$ (Т2) $ax=-b \mid : a\neq 0 \Leftrightarrow$ (Т3) $x=-\frac{b}{a}$, т.е. то има едно решение $x_1=-\frac{b}{a}$.

12 Намерете решението на уравнението.

а) $5x=-60$ б) $-10x=8$

в) $-9x=-3$ г) $\frac{1}{2}t=4$

д) $x:0{,}5=5$ е) $y:1\frac{1}{2}=4$

13 Решете уравнението.

а) $4-2x+2x=x$ б) $y(y+1)-3y=y^2+y$

в) $5x-x^2=6-x^2$ г) $4x-(2x+1)=2$

д) $4(x+2)=8$ е) $6(x-2)=3(x+5)$

ж) $4x-2(3-x)=2$ з) $3t-(18+6t)=6$

УРАВНЕНИЕТО $(ax+b)(cx+d)=0$

От правилата за умножение на рационални числа знаем, че произведението на числото нула с произволно число е нула ($0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ за всяко a), а произведението на две ненулеви числа винаги е различно от нула ($a \cdot b \neq 0$, ако $a \neq 0$ и $b \neq 0$).

Така получаваме, че произведението на две числа е нула, ако поне един от двата множителя е 0, т.е. ако $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

1 Решете уравнението $(x + 7)(3x – 4) = 0$.

Решение: Решения на уравнението $(x + 7)(3x – 4) = 0$ са тези стойности на x, за които поне един от множителите е нула, т.е. $x + 7 = 0$ или $3x – 4 = 0$. Следователно уравнението има две решения: $x_1 = –7$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

Изобщо решенията на уравнение от вида $(ax + b)(cx + d) = 0$, където $a \neq 0$ и $c \neq 0$, са решенията на $ax + b = 0$ или $cx + d = 0$, т.е. уравнението $(ax + b)(cx + d) = 0$, където $a \neq 0$ и $c \neq 0$, има две решения: $x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{d}{c}$.

2 Намерете решенията на уравнението.

а) $(x + 3)(x – 5) = 0$ б) $(6 – x)(x + 4) = 0$
в) $(2x – 5)(6x + 2) = 0$ г) $–2(1,2x + 6)(2x – 3) = 0$
д) $(y – 3)(2y + 3)(3y + 2) = 0$ е) $–t(t – 4)(6 – 3t) = 0$

Упътване. д), е) Използвайте, че произведението на няколко числа е нула, ако поне един от множителите е нула.

3 Решете уравнението.

а) $5x^2 – 2x = 0$ б) $–20x = x^2$ в) $3x^2 = 5x$

Решение: а) Имаме $5x^2 – 2x = 0 \Leftrightarrow x(5x – 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $5x – 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$ или $x = \frac{2}{5}$, т.е. уравнението има две решения: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$.

Изобщо при $a \neq 0$ уравнение от вида $ax^2 + bx = 0$ се свежда до $x(ax + b) = 0$ и следователно има две решения: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

УРАВНЕНИЯ, СВЕЖДАЩИ СЕ ДО ЛИНЕЙНИ

Ще разгледаме още някои уравнения, които се свеждат до линейни.

Такива са например всички уравнения, които са равносилни на уравнение от вида: произведение от няколко линейни множителя, равно на нула.

1 Намерете решенията на уравнението.

а) $25y^2 – 9 = 0$ б) $x^2 = –4$ в) $x^2 + 1 = 0$

Решение: а) Като приложим формулата $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$, получаваме: $25y^2 – 9 = 0$, $(5y)^2 – 3^2 = 0 \Leftrightarrow (5y + 3)(5y – 3) = 0 \Leftrightarrow (5y + 3) = 0$ или $(5y – 3) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}$ или $y = \frac{3}{5}$, т.е. решенията на уравнението са: $y_1 = -\frac{3}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$.

б) Понеже лявата страна на уравнението x^2 е неотрицателна за всяка стойност на неизвестното, а дясната –4 е отрицателна, уравнението няма решения.

Изобщо уравнение от вида $x^2 – a^2 = 0$ се свежда до $(x + a)(x – a) = 0$ $\Leftrightarrow x + a = 0$ или $x – a = 0 \Leftrightarrow x = –a$ или $x = a$ и следователно има две решения: $x_1 = –a$, $x_2 = a$.

2 Решете уравнението.

а) $x^2 – 16 = 0$ б) $25t^2 – 4 = 0$ в) $6(x^2 – 1) = 18$
г) $9 – y^2 = 0$ д) $16x^2 = 9$ е) $–3(9 – t^2) = 0$
ж) $x^2 – 0,09 = 0$ з) $–64 = –25y^2$ и) $2x^2 + 1 = 0$
й) $49y^2 – 1 = 0$ к) $50t^2 = 32$ л) $–12x^2 – 5 = 0$

3 Намерете решенията на уравнението.

а) $(x – 3)^2 = 0$ б) $9x^2 – 6x + 1 = 0$
в) $(y – 2)(y^2 – 4) = 0$ г) $(x^2 + 1)(x – 3)(2 – x) = 0$
д) $(–t^2 – 8)(4t + 7)(–2 – t) = 0$ е) $y^4 – 16 = 0$
ж) $y^2(y – 1) = 1 – y$ з) $(t^2 – 9)(t^2 – 6t + 9) = 0$

Решение: а) $(x – 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x – 3)(x – 3) = 0 \Leftrightarrow x – 3 = 0$ или $x – 3 = 0$ $\Leftrightarrow x = 3$ или $x = 3$, т.е. уравнението има две равни решения: $x_1 = x_2 = 3$.

4 Намерете решенията на уравнението.

а) $5x^2 - x = 0$ б) $32x^2 = -8x$
в) $(x + 2)^2 = x + 2$ г) $(x + 2)^2 - 4(3x + 1) = 0$
д) $-0,1(t - 2)(2 - t) = 0$ е) $-x^2 + 144 = 0$
ж) $2x(x + 5) = 10x + 50$ з) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Решение: з) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) - 4(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ или $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ или $x = 2$, т.е. решенията на уравнението са $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

5 Решете уравнението.

а) $3x^2 - x(3x - 1) = x$ б) $(2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 2x$
в) $t(7 - t) = -(t^2 - 7t + 7)$ г) $(t + 9)(t - 2)t = 0$
д) $(x^2 + 16)(x - 16) = 0$

Някои текстови задачи решаваме с линейни уравнения.

Етапите, през които минава решаването на текстови задачи, водещи до линейно уравнение, са:

- избираме неизвестно и го означаваме с буква;
- записваме с изрази зависимостите между данните от задачата, т.е. превеждаме ги на **математически език**;
- съставяме уравнение и определяме **допустимите стойности (ДС)** на неизвестното, т.е. записваме **математически модел** на задачата;
- решаваме уравнението и определяме кои от корените му са допустими стойности на неизвестното;
- отговаряме на поставения въпрос.

6 През първото полувреме на баскетболен мач двата отбора имат равен резултат. През второто полувреме първият отбор отбелязва 54 точки, а вторият – 2 пъти по-малко от точките си през първото полувреме. С какъв брой точки завършва всеки отбор, ако първият печели срещата с 4 точки разлика?

Решение: Ще означим с x броя на точките на всеки отбор за първото полувреме.

За прегледност може да запишем данните на задачата в таблица.

	I полувреме	II полувреме	Общо точки
I отбор	x	54	$x + 54$
II отбор	x	$\frac{x}{2}$	$x + \frac{x}{2}$

Неизвестното x е естествено четно число, защото x и $\frac{x}{2}$ са брой точки. Понеже първият отбор печели с 4 точки разлика, то $x + 54 = x + \frac{x}{2} + 4$.

Решавайки уравнението $x + 54 = x + \frac{x}{2} + 4$, имаме $\frac{x}{2} = 50$ или $x = 100$. Числото 100 е от допустимите стойности на x, следователно първият отбор завършва мача със 154 точки, а вторият – със 150 точки.

7 В едно училище засадили опитно поле с две правоъгълни лехи – с рози и с теменужки. Ширината на лехата с рози е два пъти по-малка от дължината ѝ, а дължината и ширината на лехата с теменужки са съответно с по 1 m по-голяма и по-малка от ширината на лехата с рози. Намерете размерите на цветните лехи, ако площта на лехата с теменужки е с 8 m^2 по-малка от тази на лехата с рози.

Решение: Да означим ширината на алеята с рози с x ($x > 0$), тогава дължината и площта ѝ ще бъдат съответно равни на $2x$ и $2x^2$.

Ширината, дължината и площта на алеята с теменужки ще бъдат съответно $(x - 1)$, $(x + 1)$ и $(x - 1)(x + 1)$.

Понеже разликата в площите на двете лехи е 10 m^2, ще имаме $(x - 1)(x + 1) - 2x^2 = 8$, откъдето ще определим неизвестното число. Имаме
$(x - 1)(x + 1) - 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ или $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ или $x = -3$.

Но за нас x е дължина на отсечка, следователно единствената възможност е $x = 3$ m.

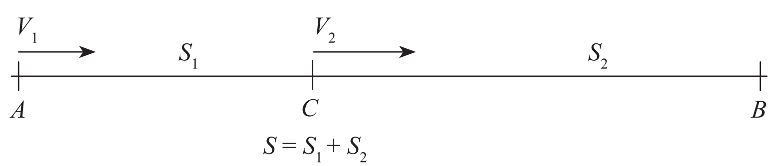
Така за лехата с рози получаваме ширина $x = 3$ m и дължина $2x = 6$ m, а за лехата с теменужки имаме ширина $(x - 1) = 2$ m и дължина $(x + 1) = 4$ m.

ЗАДАЧИ ОТ ДВИЖЕНИЕ

В задачите от движение основна е формулата $S = v \cdot t$ (пътят е равен на скоростта по времето). С нея можем да решаваме различни типове задачи в зависимост от дадените елементи.

1 В 7 ч. от град A към град B тръгва камион. Разстоянието между градовете е 272,5 km. В началото камионът се движи със скорост 75 km/h. По пътя шофьорът почива 30 min и след това увеличава скоростта с 5 km/h. Така пристига в B в 11 ч. Колко часа е пътувал шофьорът преди и след почивката?

Решение: Нека шофьорът на камиона е спрял да почива в точка C, като е пътувал t часа преди почивката.



Времето за пътуване от A до B е $11 - 7 = 4$ h, от които 0,5 h – за почивка, т.е. се е движил $4 - 0,5 = 3,5$ h. Преди почивката е пътувал t часа със скорост $v_1 = 75$ km/h, а след нея е пътувал $(3,5 - t)$ h със скорост $v_2 = 75 + 5 = 80$ km/h. Понеже двете времена са положителни, то t е число от 0 до 3,5.

	t (h)	v (km/h)	S (km)
преди почивката	t	75	$75t$
след почивката	$3,5 - t$	80	$80(3,5 - t)$

Разстоянието от A до B е $S = 272,5$ km. То е равно на разстоянието $S_1 = 75t$ от A до C плюс разстоянието $S_2 = 80(3,5 - t)$ от C до B, т.е. имаме $75t + 80(3,5 - t) = 272,5$.

Така получаваме $5t = 3,5 \cdot 80 - 272,5 = 7,5$, или $t = 1,5$. Полученото решение е между 0 и 3,5. Следователно преди почивката шофьорът е пътувал 1,5 h, а след почивката е пътувал $3,5 - 1,5 = 2$ h.

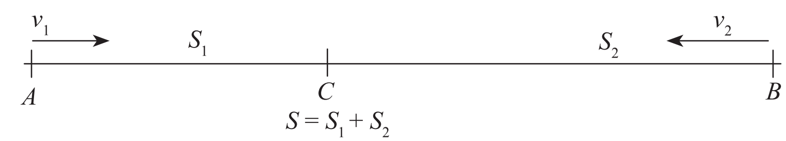
2 Разстоянието между две селища е 208 km. От тях един срещу друг тръгват двама мотоциклетисти. Намерете скоростите им, ако единият се движи с 4 km/h по-бързо от другия и ако след 2 h:

а) те се срещат;

б) разстоянието между тях е 20 km.

Решение: Нека скоростта на първия мотоциклетист е x km/h. Тогава за 2 h той изминава разстояние $2x$ km. Вторият се движи също 2 h, но със скорост $x + 4$ km/h. Той изминава разстояние $2(x + 4)$ km.

а) Понеже двамата се срещат в точка C, сумата от изминатите от тях



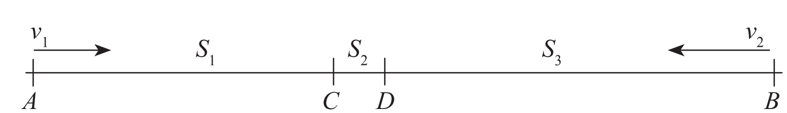
разстояния ще бъде равна на разстоянието между селищата, т.е. имаме $2x + 2(x + 4) = 208$, откъдето $4x = 200$ и $x = 50$. Следователно първият мотоциклетист се движи със скорост 50 km/h, а вторият – с $50 + 4 = 54$ km/h.

Забележка. Понеже $tv_1 + tv_2 = S = t(v_1 + v_2)$, за движение едно срещу друго с дадени скорости на две тела, намиращи се първоначално на разстояние S едно от друго, може да мислим като за движение само на едното тяло (другото остава в покой), но със скорост, равна на сумата от скоростите на двете тела.

б) От условието не е ясно дали мотоциклетистите са се разминали, или още не са се срещнали.

Ще разгледаме поотделно двата различни случая:

	v (km/h)	t (h)	S (km)
I мотоциклетист	x	2	$2x$
II мотоциклетист	$x + 4$	2	$2(x + 4)$



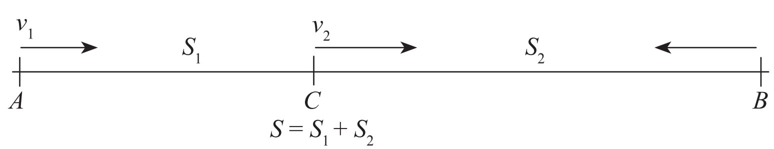
I случай. След 2 h двамата мотоциклетисти са били на разстояние 20 km един от друг, без да са се срещали, т.е. първият е бил в точка C, а вторият – в точка D, като при това $AC = 2x$, $BD = 2(x + 4)$ и $CD = 20$ km.

Понеже $AC + CD + DB = AB = 208$ km, то $2x + 20 + 2(x + 4) = 208$, $4x = 180$ и $x = 45$. Получихме, че скоростта на първия мотоциклетист е 45 km/h, а на втория е $45 + 4 = 49$ km/h.

II случай. След 2 h двамата са били на разстояние 20 km един от друг, като преди това са се разминали, т.е. първият е бил в точка D, а вторият – в точка C, като $AD = 2x$, $BC = 2(x + 4)$ и $CD = 20$ km.

Понеже $AD - CD + CB = AB = 208$ km, то $2x - 20 + 2(x + 4) = 208$, $4x = 220$ и $x = 55$. Получихме, че скоростта на първия мотоциклетист е 55 km/h, а на втория е $55 + 4 = 59$ km/h.

3 Камион тръгва в 10 ч. сутринта от град A, а 30 min след него от A тръгва автомобил, който се движи с 20 km/h по-бързо. На какво разстояние от A автомобилът настига камиона, ако това става в 12 ч. на обед? Какви са скоростите на камиона и на автомобила?



Решение: Нека скоростта на камиона е x km/h. Настигането в точка B е $12 - 10 = 2$ h след тръгването на камиона и $2 - 0,5 = 1,5$ h след тръгването на автомобила. Така камионът се движи сам 0,5 h със скорост x km/h и изминава разстояние $S_1 = 0,5x$ km. След още 1,5 h движение със скорости x km/h и $x + 20$ km/h двете превозни средства изминават съответно $S_2 = 1,5x$ km и $S = 1,5(x + 20) = S_1 + S_2$ km. (Все едно, че автомобилът и камионът тръгват едновременно, съответно от точка A и точка C.)

	v (km/h)	t (h)	S (km)
камион – сам	x	0,5	$0,5x$
камион	x	1,5	$1,5x$
автомобил	$x + 20$	1,5	$1,5(x + 20)$

Имаме $0,5x + 1,5x = 1,5(x + 20)$, $0,5x = 1,5 . 20$ и $x = 60$, т.е. скоростта на камиона е 60 km/h, а тази на автомобила – $x + 20 = 80$ km/h. Разстоянието, на което автомобилът настига камиона, е $AB = S = S_1 + S_2 = 2 . 60 = 1,5 . 80 = 120$ km.

Забележка. Понеже $tv_1 - tv_2 = S = t(v_1 - v_2)$, за движение едно след друго с дадени скорости на две тела, намиращи се първоначално на разстояние S едно от друго, може да мислим като за движение само на едното тяло (другото остава в покой), но със скорост, равна на разликата от скоростите на двете тела.

4 Лина тръгва с велосипед и се движи със скорост 12 km/h, а 15 min по-късно с велосипед след нея тръгва Чавдар. След колко часа той ще настигне Лина, ако скоростта му е 14 km/h?

5 Мотоциклетист изминал половината от пътя между два града за 1 h 15 min. След това намалил скоростта си с 6 km/h и изминал остатъка от пътя за 1 h 24 min. Намерете разстоянието между двата града и скоростите, с които се е движил мотоциклетистът.

При движение в река (във въздуха) със скорост на течението (вятъра) v_1 и скорост на тялото в спокойна вода (при безветрие) v може да смятаме, че течението на водата (въздуха) е спряло, а тялото се движи по течението (по посока на вятъра) със скорост $v + v_1$, а срещу течението (вятъра) – със скорост $v - v_1$.

6 Вертолет изминава разстоянието между два града при попътен вятър за 5 h 30 min, а при насрещен вятър – за 6 h. Намерете разстоянието между двата града, ако скоростта на вятъра е 10 km/h.

7 Катер изминава 13 km, като най-напред се движи 40 min по течението на река, а след това – 15 min в езерото, в което тя се влива. Намерете скоростта на катера в спокойна вода, ако скоростта на течението на реката е 3 km/h.

ЗАДАЧИ ОТ РАБОТА

В задачите от работа използваме формулата $A = P \,.\, t$ (работата е равна на производителността (мощността), умножена по времето). С нея можем да решаваме различни типове задачи в зависимост от дадените елементи.

1. Робот изработва 15 детайла за 2 min, а друг – 20 детайла за 3 min. За колко минути двата робота ще изработят заедно 255 детайла?

Решение: Нека търсеното време е t min.

Понеже първият робот изработва 15 детайла за 2 min, неговата производителност е $P_1 = \frac{15}{2}$ детайла за минута, а на втория – $P_2 = \frac{20}{3}$ детайла за минута.

Така двата робота работят заедно t мин и произвеждат общо

$\frac{15}{2}t + \frac{20}{3}t = 255$ детайла.

От $\frac{15}{2}t + \frac{20}{3}t = 255$ последователно получаваме

$(\frac{15}{2} + \frac{20}{3})t = 255,$

$\frac{45+40}{6}t = 255,$

$t = \frac{255 \,.\, 6}{85} = \frac{17 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 3}{5 \,.\, 17} = 18.$

Така двата робота ще произведат 255 детайла за 18 min.

2. Становете в килимарски цех са с еднаква производителност. Ако на 3 стана изработват 3 килима за 2 h, на колко стана ще изработят 15 килима за 6 h?

3. Електромонтьор монтира кабел за 8 h, а помощникът му – за 12 h. За колко време двамата ще монтират кабела, ако работят заедно?

Решение: Означаваме цялата работа (монтирането на кабела) с 1. Нека времето, за което двамата заедно ще свършат работата, означим с t h.

Ще съставим следната таблица:

№	За колко време сам свършва цялата работа (в часове)?	Каква част от работата свършва за единица време (1 h)? (мощност)	Колко време работи?	Каква част от работата свършва?
I	8	$\frac{1}{8}$	t	$\frac{1}{8}t$
II	12	$\frac{1}{12}$	t	$\frac{1}{12}t$

Понеже двамата заедно са свършили цялата работа, то $\frac{1}{8}t + \frac{1}{12}t = 1.$

От $\frac{1}{8}t + \frac{1}{12}t = 1$ последователно получаваме

$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right)t = 1,$

$\frac{3+2}{24}t = 1,$

$t = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} = 4\frac{48}{60}.$

Двамата ще свършат заедно работата за 4 h 48 min.

Забележка. Тук можем да разсъждаваме и така: Двамата работници работят заедно с производителност, равна на сумата от производителностите на всеки от тях. Ще получим ли същия резултат?

4. Ина измива прозорците вкъщи за 1 h 30 min, а сестра ѝ Олга – за 2 h 15 min. За колко часа двете заедно ще измият прозорците?

5. Басейн в спортен комплекс се пълни от една тръба за 6 h, а от друга – за 10 h. За колко часа двете тръби заедно ще напълнят 80% от басейна, ако първата е пусната 2 h по-рано?

6 Фермер изоравал на ден по 3 хектара повече от съседа си и за 6 дни изорал с 2 хектара повече, отколкото съседът му за 10 дни. По колко хектара е изоравал на ден всеки фермер?

Решение: Ако съседът е изоравал по x хектара на ден, фермерът е изоравал на ден по $x + 3$ хектара. За 6 дни е изорал $6(x + 3)$ хектара, а съседът му за 10 дни е изорал $10x$ хектара. Така получаваме, че $10x + 2 = 6(x + 3)$,

$10x + 2 = 6x + 18$,

$10x - 6x = 18 - 2$,

$4x = 16$,

$x = 4$.

Следователно съседът е изоравал по 4 хектара на ден, а фермерът е изоравал на ден по $4 + 3 = 7$ хектара.

7 С един багер може да се изкопае канал за 30 дни, а с друг – за $\frac{2}{3}$ от това време. За колко дни двата багера ще изкопаят 50% от канала?

Решение: Означаваме целия канал с 1. Тогава 50% от канала са $\frac{1}{2}$.

Първият багер може да изкопае канала за 30 дни. Вторият може да изкопае канала за $\frac{2}{3} . 30 = 20$ дни.

За 1 ден първият багер изкопава $\frac{1}{30}$ от канала, а вторият – $\frac{1}{20}$ от него. Двата багера заедно изкопават $\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ от канала. Следователно те ще изкопаят 50% от канала за $\frac{1}{2} : \frac{1}{12} = \frac{1}{2} . 12 = 6$ дни.

8 Басейн се изпразва от отточен канал за 12 h. Колко време е минало от отварянето на тръбата до изпразването му, ако водата в басейна е била $\frac{1}{3}$ от обема му?

9 Басейн се пълни от една тръба за 8 h, а от друга – за 13 h 20 min. Двете тръби били отворени едновременно. След това затворили първата тръба и оставили втората да тече още 2 h. Водата напълнила 70% от басейна. По колко часа е била отворена всяка от тръбите?

10 Яна чела 5 дни по 10 страници на ден от една книга. След това започнала да чете по 2 страници повече и така я прочела 1 ден по-рано. Колко страници има книгата?

11 Двама оператори заедно набират на компютър текст, като първият продължил да набира 1 h след втория. По колко часа са работили операторите, за да наберат текста, ако първият може да го набере сам за 3 h, а вторият – за 2 h?

12 Бащата на Мартин окосява сам тревата пред къщата им за 30 min, а Мартин е 1,5 пъти по-бавен от него. Колко минути са косили заедно, ако са окосили 60% от площта?

13 В сладкарница от сладкарска верига дневно изработват с 3 торти повече, отколкото в друга сладкарница от същата сладкарска верига. По колко торти изработват дневно във всяка сладкарница, ако в първата за 5 дни изработват толкова торти, колкото във втората за 6 дни?

14 Ива засадила по равен брой доматен разсад в два парцела, като оформила 6 реда в първия и 9 реда във втория. Колко корена общо е разсадът, ако в ред от първия парцел има с 4 корена повече отколкото в ред от втория?

15 Борислав ремонтирал стаята си за 6 дни, а неговият приятел му казал, че той би могъл да извърши това за 4 дни. Колко дни би си спестил Борислав за ремонта, ако го извършваше заедно с приятеля си?

16 Багер може да изкопае канал сам за 12 дни, а заедно с друг багер – за 8 дни. За колко дни вторият багер може сам да изкопае канала?

17 Двама братя лепили тапети в стаята си. По-големият брат залепил 70% от тях и още 2,8 m^2, а по-малкият – 5 m^2. Колко квадратни метра тапети са залепили двете момчета?

ЗАДАЧИ ОТ КАПИТАЛ

Хората внасят парите си в банки, в акционерни дружества, в ценни книжа и др., за да получават дивиденти (печалба) от тях.

Лихвата на банките за даден **лихвен период** се задава в проценти. За срочните влогове тя се **капитализира**. Това означава, че при всяко повтаряне на лихвения период банката олихвява не само началния капитал, но и получената за него лихва в края на предишния период.

Лихвеният период е обикновено от 1 или 2 седмици, 1, 3, 6, 12 или 24 месеца. Лихвата зависи и от размера на депозита.

Върху размера на капитала влияят:

- k_0 – начален капитал (депозит);
- $p\%$ – лихвен процент за дадения период;
- $l = k_0 \cdot \dfrac{p}{100}$ – натрупана лихва за периода;
- $k = k_0 + l = k_0 + k_0 \cdot \dfrac{p}{100} = (1 + \dfrac{p}{100})k_0$ – нараснал капитал в края на периода.

В зависимост от дадените елементи може да търсим началния капитал, лихвата, лихвения процент или нарасналия капитал.

1. Фирма внася 150 000 лв. на едноседмичен срочен влог при 0,8% лихва. Колко лева е нарасналият капитал в края на седмицата?

Решение: Имаме начален капитал (депозит) $k_0 = 150\,000$ лв. и лихвен процент за дадения период $p = 0{,}8\%$. Следователно нарасналият капитал е

$k = (1 + \dfrac{p}{100})k_0 = (1 + 0{,}008) \cdot 150\,000 = 151\,200$ лв.

2. Госпожа Георгиева внася на тримесечен срочен влог 2400 €. След изтичане на срока капиталът ѝ нараства на 2452,80 €. Какъв е лихвеният процент?

Решение: Получената лихва е 2452,80 – 2400 = 52,80 €. Това означава, че

$\dfrac{p}{100} \cdot 2400 = 52{,}8$, т.е. $p = 52{,}8 : 24$ и $p = 2{,}2$.

Следователно лихвеният процент е 2,2%.

3. Дружество депозирало сума на двегодишен срочен влог при 3,7% лихва. Каква е внесената сума, ако в края на периода тя е нараснала с 444 лв.?

Решение: Нека k_0 е размерът на депозита. Тогава натрупаната лихва е

$\dfrac{3{,}7}{100} \cdot k_0 = 444$, откъдето $k_0 = 44\,400 : 3{,}7$ и $k_0 = 12\,000$.

Следователно депозитът е 12 000 лв.

4. Мартин спечелил 400 лв. и ги внесъл на двуседмичен срочен влог при лихва 1%. На колко е нараснала сумата в края на:

а) първия период; б) втория период?

Решение: В края на първия период (т.е. след 2 седмици)

$k_1 = (1 + \dfrac{1}{100})k_0 = (1 + \dfrac{1}{100}) \cdot 400 = 1{,}01 \cdot 400 = 404$ лв.

Следователно в края на първия период сумата е нараснала на 404 лв.

б) В края на втория период (т.е. след 4 седмици) капиталът е нараснал на

$k_2 = (1 + \dfrac{1}{100})\,k_1 = (1 + \dfrac{1}{100})^2\,k_0 = 1{,}01 \cdot 404 = 1{,}01^2 \cdot 400 = 408{,}04$ лв.

Следователно в края на втория период сумата е нараснала на 408,04 лв.

5. Родителите на Вальо поискали от него да пресметне как ще бъде по-изгодно – да внесат 17 000 лв. на тримесечен срочен влог при лихва 3% за два последователни периода или да ги внесат като шестмесечен срочен влог при лихва 3,35%. Какво е пресметнал Вальо?

6. Каква е реалната стойност на 10 000 лв. при инфлация 12%?

Упътване. При инфлация $p\%$ парите k_0 губят $p\%$ от стойността си, т.е. реалната стойност на сума от k_0 лв. е $(1 - \dfrac{p}{100})k_0$.

7. Каква е инфлацията, ако реалната стойност на 120 000 лв. вече е 114 000 лв.?

8. На колко ще нарасне депозит от 3000 лв., внесен на двадесет и четири месечен срочен влог с лихва 3,7%?

УРАВНЕНИЕ – ОБОБЩЕНИЕ

Числово равенство

$U = V$ – вярно числово равенство, ако стойностите на числовите изрази U и V са равни.

Свойства на числовите равенства

За числовите изрази U, V, W и числото $a \neq 0$ равенствата
$U = V$, $U + W = V + W$, $U - W = V - W$,
$aU = aV$, $U : a = V : a$
са едновременно верни или неверни.

Уравнението с едно неизвестно – равенство между изрази, съдържащи една променлива.
Например $7(x - 1) = 2x + 3$.

Решение на уравнение – стойност на променливата, за която от уравнението се получава вярно числово равенство.
Например $x = 1{,}5$ е решение на уравнението $3x - 1 = x + 2$.

Еквивалентни уравнения – имат едни и същи решения или и двете нямат решения.

Преобразуване на уравнение в еквивалентно:
- замяна на израз с тъждествено равен на него израз;
- прехвърляне на израз от едната страна на уравнението в другата с противоположен знак;
- умножение (деление) на двете страни на уравнението с различно от нула число.

Уравнението $ax + b = 0$

$ax + b = 0,\ a \neq 0$	$0 \, . \, x = b,\ b \neq 0$	$0 \, . \, x = 0$
$x = -\frac{a}{b}$	$0 \, . \, x = 0$ за всяко x.	Вярно за всяко x.
Решение $x = -\frac{a}{b}$.	Няма решение.	Всяко число е решение.

Уравнението $(ax + b)(cx + d) = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$

$ax + b = 0$ или $cx + d = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$

$x_1 = -\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_2 = -\frac{d}{c}$

Уравнението $|ax + b| = c$

$\lvert ax + b\rvert = c,\ a \neq 0,\ c > 0$	$\lvert ax + b\rvert = 0,\ a \neq 0$
$ax + b = -c$ или $ax + b = c$	$ax + b = 0$
Уравнението има две решения.	Уравнението има едно решение.

$|ax + b| = c$, $c < 0$
Уравнението няма решения.

Уравнения, свеждащи се до линейни
- освобождаване от знаменател

  Например $x - 2 \, . \, \frac{3x-1}{4} = \frac{1}{3}$.
- пропорция

  Например $\frac{x}{x-1} = \frac{x-2}{x}$, $x \neq 1$, $x \neq 0$.

Задачи за движение

$$S = vt, \quad v = S : t, \quad t = S : v$$

Задачи за работа

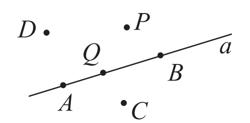
$$A = Pt, \quad P = A : t, \quad t = A : P$$

Задачи за капитал

$$l = k_0 \, . \, \frac{P}{100}, \quad k = \left(1 + \frac{P}{100}\right)k_0$$

ТОЧКА, ПРАВА И ОТСЕЧКА. ЛЪЧ, ПОЛУРАВНИНА И ЪГЪЛ

„Точка“, „права“ и „равнина“ са основни понятия. За тях няма определение. Прието е да означаваме точките с главни латински букви – A, B, C, D, …, а правите – с малки латински букви – a, b, c, d, …, или с две точки от правата – например AB, CD и т.н.

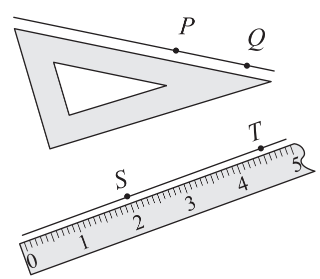


точки: A, B, P, Q, ...
прави: AB или a
$A \in a$, $B \in a$
$P \overline{\in} a$, $P \notin a$

На чертежа точката A е върху правата a. Казваме още, че A **принадлежи** на правата a, и означаваме с $A \in a$, или a **минава** през точката A, и означаваме с $a \ni A$.

Точката P **не е** на правата a. Казваме още, че P **не принадлежи** на правата a или че a **не минава** през точката P, и означаваме с $P \notin a$.

(1) Като използвате чертежа по горе, запишете положението на точките спрямо правата a.

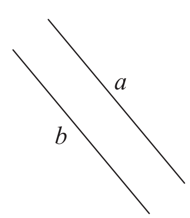


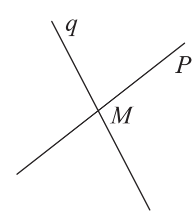
Права през две точки чертаем с помощта на линийка или чертожен триъгълник. На чертежа изобразяваме само част от правата, а мислено си представяме, че тя продължава неограничено в двете посоки.

Основно свойство на правите: През две различни точки минава само една права.

Всяка права има безброй много точки.

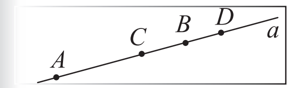
Две прави в равнината са **успоредни**, когато нямат обща точка.





На чертежа правите a и b са успоредни. Означаваме $a \parallel b$.

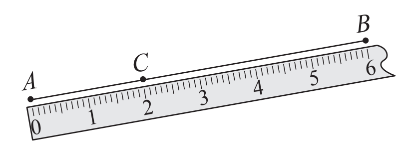
Две прави в равнината **се пресичат**, когато имат само една обща точка. Общата им точка наричаме **пресечна точка** на правите. На чертежа правите p и q се пресичат и пресечната им точка е M. Означаваме с $p \times q$.



На чертежа е изобразена права a и са означени четири точки върху нея. Точката C **е между точките** A и B, а точката D **не е между точките** A и B.

Основно свойство за разположение на точки върху права: От три различни точки върху права една от точките е между останалите две.

Отсечка наричаме част от права, която се състои от точките на правата между две дадени точки и дадените точки. Дадените точки наричаме **краища** на отсечката, а тези, които са между тях – **вътрешни точки на отсечката**. Отсечката с краища A и B означаваме с AB или BA. На чертежа точката C е вътрешна за отсечката AB.

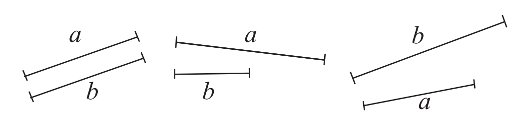


Дължината на отсечка при избрана мерна единица показва колко пъти мерната единица или нейна част се нанасят в отсечката. Дължината на отсечката AB наричаме **разстояние** между точките A и B и я означаваме също с AB.

Основно свойство на измерването на отсечки: При избрана мерна единица всяка отсечка има дължина, която е положително число. Дължината на всяка отсечка е сбор от дължините на отсечките, на които тя е разделена от вътрешна точка от отсечката.

Например: На чертежа $AB = 6$ cm, $AC = 2$ cm и $CB = 4$ cm. Дължината на AB е сбор от дължините на AC и CB.

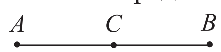
(2) Точката P лежи на правата MN и е между M и N. Намерете дължината на отсечката MN, ако $MP = 9,3$ cm, а $PN = 16$ mm.



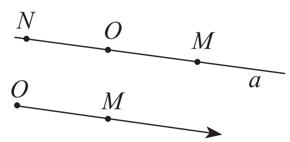
За отсечките a и b (измерени с една и съща мерна единица) казваме, че:

- a е **равна** на b (записваме $\boldsymbol{a = b}$), когато дължините им са равни;
- a е **по-голяма** от b (записваме $\boldsymbol{a > b}$), когато дължината на a е по-голяма от дължината на b;
- a е **по-малка** от b (записваме $\boldsymbol{a < b}$), когато дължината на a е по-малка от дължината на b.

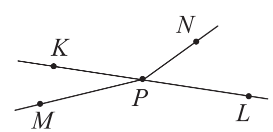
Среда на отсечка е точка от отсечката, която я разделя на две равни отсечки. На чертежа точката C е среда на отсечката AB, т.е. $AC = CB$.



На чертежа точката O разделя правата a на две части, всяка от които наричаме **лъч**. Точката O наричаме начало на лъчите. Лъчите, на които точка разделя дадена права, наричаме **противоположни**. Лъчът, който съдържа точката M, означаваме с $\overrightarrow{OM}$ или с една буква: $\overrightarrow{m}$.

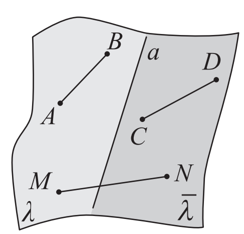


3 Запишете лъчите от чертежа с начало точката $\boldsymbol{P}$ и двойките противоположни лъчи.

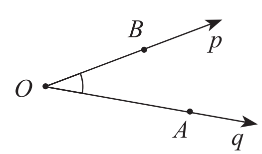


На чертежа правата $\boldsymbol{a}$ разделя равнината на две части, наречени **полуравнини с контур $\boldsymbol{a}$**. Двете полуравнини са означени с $\boldsymbol{\lambda}$ (четем „ламбда“) и $\overline{\lambda}$ („ламбда черта“). Точките A, B и M са от полуравнината $\boldsymbol{\lambda}$, а точките C, D и N са от полуравнината $\overline{\lambda}$.

Разделянето на равнината на полуравнини има свойството: Две точки са от една и съща полуравнина, когато съединяващата ги отсечка не пресича правата a, и са от различни полуравнини, когато отсечката пресича правата a.

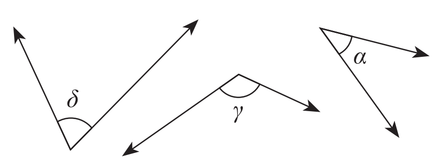


Ъгълът е геометрична фигура, която се състои от два лъча с общо начало. Означаваме я с $\sphericalangle AOB$ или $\sphericalangle(p, q)$, или $\sphericalangle O$.

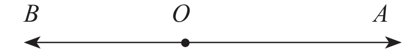


Двата лъча наричаме **рамена** на ъгъла, а общото начало – **връх на ъгъла**.

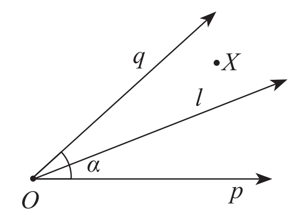
Освен чрез лъчите им, чрез точки върху раменете им или чрез върха им означаваме ъглите и с гръцки букви: $\boldsymbol{\alpha}$ (алфа), $\boldsymbol{\beta}$ (бета), $\boldsymbol{\gamma}$ (гама), $\boldsymbol{\delta}$ (делта).



Ъгъл, чиито рамена са противоположни лъчи, наричаме **изправен**.

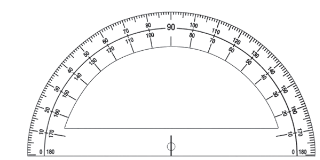


Вътрешни точки на $\sphericalangle AOB$ наричаме общите точки на двете полуравнини: $\boldsymbol{\lambda}$ – с контур OA, която съдържа точката B, и $\boldsymbol{\mu}$ – с контур OB, която съдържа точката A. Ако X е вътрешна точка на $\sphericalangle AOB$, казваме още, че X е от вътрешността на $\sphericalangle AOB$, а лъча $\overrightarrow{OX}$ наричаме вътрешен за този ъгъл.



Вътрешния лъч за даден ъгъл, който го разделя на две равни части, наричаме **ъглополовяща на ъгъла**.
На чертежа лъчът $\overrightarrow{l}$ е ъглополовяща.

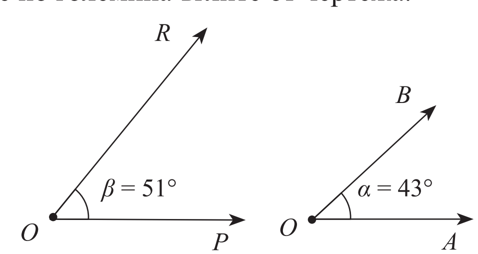
Ъглите измерваме най-често в градуси. С помощта на транспортир може да измерим градусната мярка на всеки ъгъл.



За ъглите α и β (измерени с една и съща мерна единица) казваме, че:

- $\boldsymbol{\alpha}$ **е равен на** $\boldsymbol{\beta}$ (записваме $\boldsymbol{\alpha = \beta}$), когато мерките им са равни;
- $\boldsymbol{\alpha}$ **е по-голям от** $\boldsymbol{\beta}$ (записваме $\boldsymbol{\alpha > \beta}$), когато мярката на α е по-голяма от мярката на β;
- $\boldsymbol{\alpha}$ **е по-малък от** $\boldsymbol{\beta}$ (записваме $\boldsymbol{\alpha < \beta}$), когато мярката на α е по-малка от мярката на β.

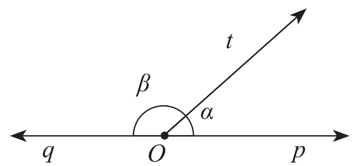
4 Сравнете по големина ъглите от чертежа.



СЪСЕДНИ ЪГЛИ, ПРОТИВОПОЛОЖНИ ЪГЛИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИ ПРАВИ

Два ъгъла, които имат общо рамо, а другите им рамена са противоположни лъчи, наричаме съседни ъгли.

На чертежа α и β са съседни ъгли. Общото им рамо е лъчът $\vec{t}$.



Сборът на два съседни ъгъла е равен на 180°, т.е. $\alpha + \beta = 180°$.

(1) Колко съседни ъгъла на един ъгъл може да постром?

(2) Намерете съседните ъгли, ако:
а) единият е 4 пъти по-голям от другия;
б) двата ъгъла са равни.

Решение: а) Тъй като α и β са съседни, то $\alpha + \beta = 180°$. Но $\beta = 4\alpha$ и тогава $\alpha + 4\alpha = 180°$, т.е. $5\alpha = 180°$, $\alpha = 180° : 5$. Намираме $\alpha = 36°$, $\beta = 144°$.

б) Тъй като $\alpha + \beta = 180°$ и $\alpha = \beta$, то $\alpha + \alpha = 180°$, $2\alpha = 180°$, $\alpha = 180° : 2$. Намираме $\alpha = \beta = 90°$.

Ъгъл, равен на съседния си ъгъл, наричаме **прав ъгъл**.

Ъгъла $\boldsymbol{\alpha}$ наричаме **остър**, ако е по-малък от правия ъгъл, т.е. от 90°, и **тъп**, ако е по-голям от правия ъгъл, т.е. от 90°.

(3) Какъв е съседният ъгъл на:
а) остър ъгъл; б) прав ъгъл; в) тъп ъгъл?

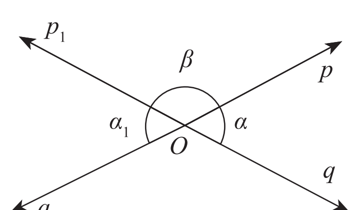
(4) Намерете съседния ъгъл на ъгъл с мярка:
а) 30°; б) 97°; в) 69°.

(5) Намерете съседните ъгли, ако градусните им мерки се отнасят както 5 : 4.

Два ъгъла, рамената на които са противоположни лъчи, наричаме **противоположни (върхни) ъгли**.

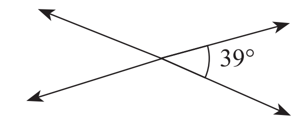
Противоположните ъгли α и α_1 са съседни на $\sphericalangle\beta$, следователно го допълват до 180°.

Затова $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha_1}$ **са равни**.

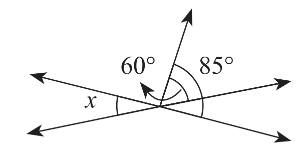


Противоположните (върхните) ъгли са равни.

(6) Намерете останалите ъгли, получени при пресичането на двете прави от чертежа.

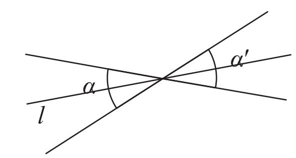


(7) Намерете означения с $\boldsymbol{x}$ ъгъл.



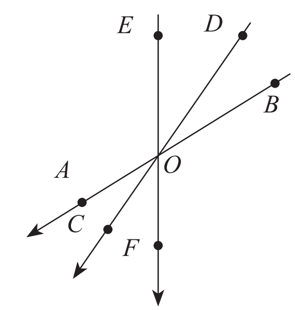
(8) Намерете ъглите, които се получават при пресичането на две прави, ако сборът на два от тях е 80°.

Понякога правата, върху която лежи ъглополовящата на ъгъл, също наричаме **ъглополовяща на ъгъла**.



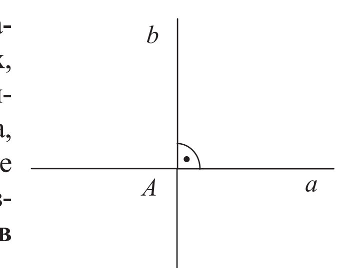
Противоположните ъгли имат за ъглополовяща една и съща права.

(9) Намерете $\sphericalangle COB$, ако $\overrightarrow{OC}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AOF$, $\overrightarrow{OD}$ – на $\sphericalangle BOE$, и $\sphericalangle AOF + \sphericalangle EOB = 108°$.



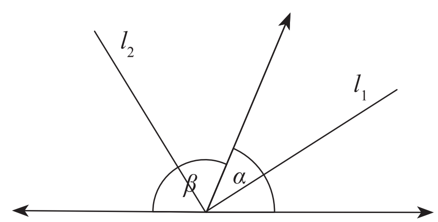
(10) Лъчът OC е вътрешен за $\sphericalangle AOB = 122°$. Намерете ъгъла между ъглополовящите на $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$, ако $\sphericalangle AOC = 40°$.

Правите a и b се пресичат в точка A и образуват четири ъгъла. Ако изберем един от тях, останалите ъгли са или съседни, или противоположни на избрания ъгъл. Оттук следва, че ако един от ъглите е прав, то останалите три ъгъла също са прави. В такъв случай казваме, че правите a и b се **пресичат под прав ъгъл**. Означаваме с $a \perp b$.

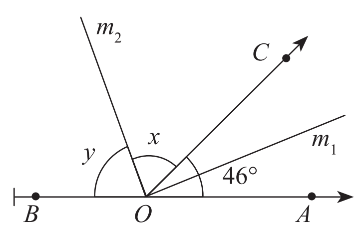


Две прави наричаме **перпендикулярни**, когато се пресичат под прав ъгъл. Правия ъгъл означаваме с точка, както е показано на чертежа.

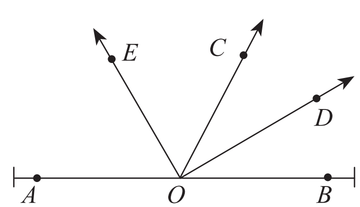
Ъглополовящите на два съседни ъгъла са перпендикулярни. На чертежа $\sphericalangle(l_1, l_2) = 90°$.



11 Намерете неизвестните ъгли x и y, ако правите m_1 и m_2 са ъглополовящи на $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$.



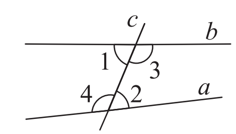
12 Намерете $\sphericalangle AOE$, ако $\overrightarrow{OD}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BOC$, а $\overrightarrow{OE}$ – на $\sphericalangle AOC$, и $\sphericalangle DOC = 34°$.



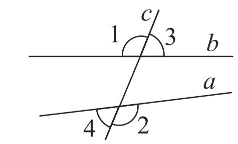
ЪГЛИ, ПОЛУЧЕНИ ПРИ ПРЕСИЧАНЕТО НА ДВЕ ПРАВИ С ТРЕТА

Нека правата ***c*** пресича правите ***a*** и ***b***, както е показано на чертежите. Двойките ъгли, които **правата *c*** определя с ***a*** и ***b***, имат специални названия, които са показани на чертежа.

кръстни ъгли
$\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$
$\sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 4$

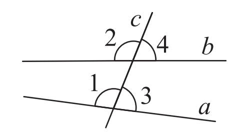


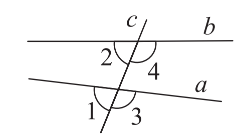
вътрешни кръстни



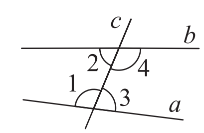
външни кръстни

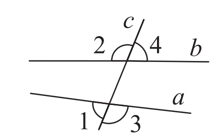
съответни ъгли
$\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$
$\sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 4$





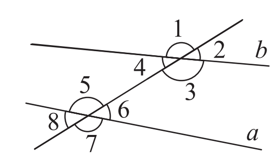
прилежащи ъгли
$\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$
$\sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 4$



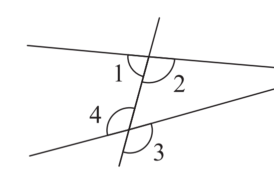


вътрешни прилежащи   **външни прилежащи**

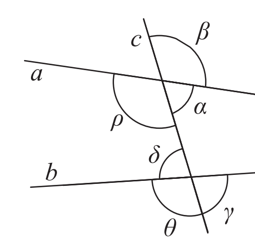
1 Запишете всички двойки ъгли, получени при пресичането на правите ***a*** и ***b*** с правата ***c***, като използвате съответните означения от чертежа.



2 От чертежа запишете двойката:
а) кръстни ъгли;
б) прилежащи ъгли;
в) съответни ъгли.



3 При пресичането на правите ***a*** и ***b*** с правата ***c***, като използвате съответните означения от чертежа, запишете всички получени двойки:
а) кръстни ъгли; б) прилежащи ъгли;
в) съответни ъгли; г) съседни ъгли;
д) връхни ъгли.

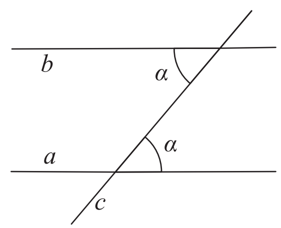


ПРИЗНАК ЗА УСПОРЕДНОСТ НА ДВЕ ПРАВИ. СВОЙСТВА НА УСПОРЕДНИТЕ ПРАВИ

Ще разгледаме три **признака** (условия) за успоредност на прави, свързани с ъглите, които въведохме в предишната тема.

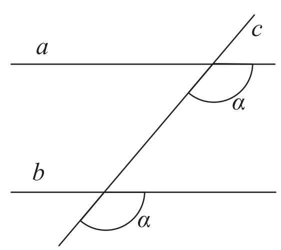
I. *Ако при пресичането на две прави с трета* **двойка кръстни ъгли** *са равни, двете прави са успоредни.*

Например: На чертежа кръстните ъгли, получени при пресичането на правите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с правата $\boldsymbol{c}$, са равни (и двата са равни на $\boldsymbol{\alpha}$). От това следва, че $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.



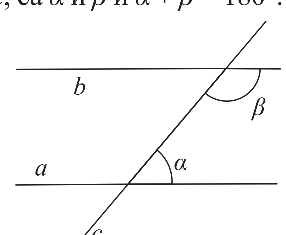
II. *Ако при пресичането на две прави с трета* **двойка съответни ъгли** *са равни, правите са успоредни.*

Например: На чертежа съответните ъгли, получени при пресичането на правите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с правата $\boldsymbol{c}$, са равни (и двата са равни на $\boldsymbol{\alpha}$). От това следва, че $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.



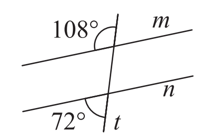
III. *Ако при пресичането на две прави с трета* **сборът на два прилежащи ъгъла е равен на 180°**, *правите са успоредни.*

Например: На чертежа прилежащите ъгли, получени при пресичането на правите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с правата $\boldsymbol{c}$, са α и β и $\alpha + \beta = 180°$. От това следва, че $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

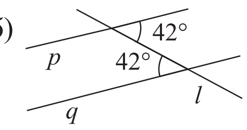


1 Кои от двойките прави са успоредни?

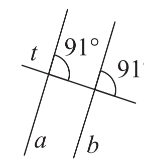
а)



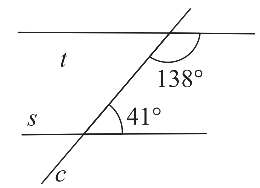
б)



в)



г)



Решение: а) $\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}$, защото сборът на два прилежащи ъгъла, получени при пресичането на m и n с правата t, е: $72° + 108° = 180°$;

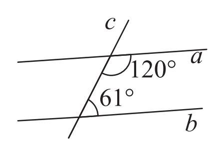
б) $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$, защото двойката вътрешно кръстни ъгли при пресичането на p и q с правата l са равни на $42°$;

в) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, защото двойката съответни ъгли при пресичането на a и b с правата t са равни на $91°$;

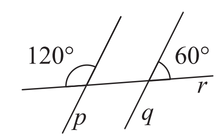
г) $\boldsymbol{t} \parallel \boldsymbol{s}$, защото сборът на два прилежащи ъгъла, получени при пресичането на t и s с правата c, е: $41° + 138° = 179° \neq 180°$.

2 Успоредни ли са правите?

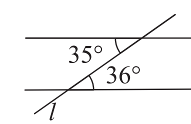
а) a и b



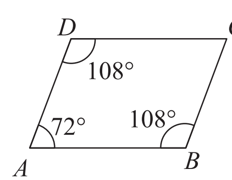
б) p и q



в) s и t



3 Успоредник ли е четириъгълникът $ABCD$?



Твърдения, които приемаме за верни, без да ги доказваме, наричаме **аксиоми**.

Едно такова твърдение е

Аксиомата за успоредност:

През точка, нележаща на дадена права, не може да минава повече от една права, успоредна на дадената.

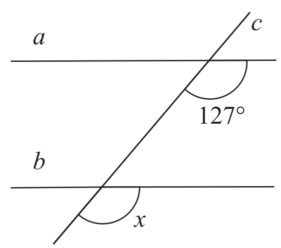
Свойства на успоредните прави

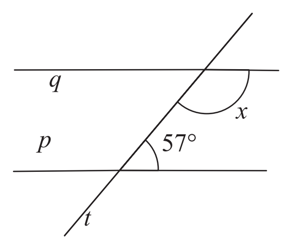
I. Ако две успоредни прави са пресечени с трета, **кръстните им ъгли** са равни.

II. Ако две успоредни прави са пресечени с трета, **съответните им ъгли** са равни.

III. Ако две успоредни прави са пресечени с трета, **сборът на прилежащите им ъгли е равен на 180°**.

4 Намерете неизвестния ъгъл $\boldsymbol{x}$ от чертежите, ако:
а) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$; б) $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$.





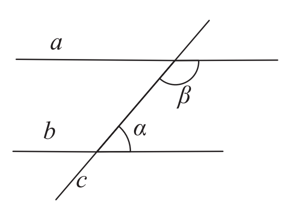
Решение: а) Успоредните прави a и b са пресечени от правата c. Тогава от свойството на успоредните прави съответните ъгли са равни, т.е. $x = 127°$.

б) От свойство III знаем, че *„Ако две успоредни прави са пресечени с трета,* **сборът на прилежащите им ъгли е равен на 180°**“.

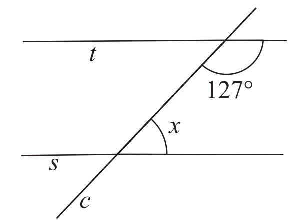
Следователно $x + 57° = 180°$. Намираме $x = 180° - 57°$, т.е. $x = 123°$.

5 Намерете означените на чертежа ъгли, ако $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ и:
а) $\alpha : \beta = 2 : 3$; б) α е с 38° по-малък от β;
в) β е 2 пъти по-голям от α; г) α е 3 пъти по-малък от β.

Решение: а) От $\alpha : \beta = 2 : 3$ намираме $\alpha = 2x$ и $\beta = 3x$. По условие $(\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, следователно от свойство III: *„Ако две успоредни прави са пресечени с трета,* **сборът на прилежащите им ъгли е равен на 180°**“, $\alpha + \beta = 180°$, т.е. $2x + 3x = 180°$, $5 \,.\, x = 180°$, $x = 180° : 5$, т.е. $x = 36°$. Така за $\alpha = 2 \,.\, 36° = 72°$ и за $\beta = 3 \,.\, 36° = 108°$.

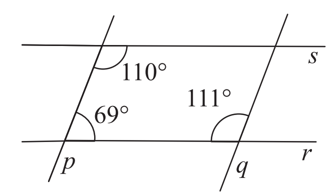


6 Определете стойността на неизвестният ъгъл x така, че правите s и t да са успоредни.

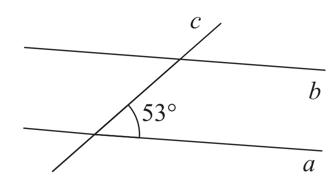


Решение: За да са успоредни правите s и t според трети признак: *„Ако при пресичането на две прави с трета* **сборът на два прилежащи ъгъла е равен на 180°**, *правите са успоредни“*, трябва $x + 127° = 180°$. Следователно $x = 180° - 127°$, $x = 53°$.

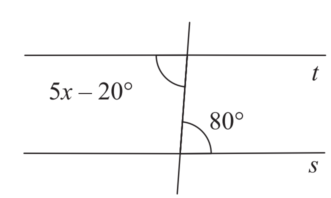
7 Кои от правите p, q, r и s на чертежа са успоредни?



8 На чертежа правите a и b са успоредни. Намерете всички ъгли, образувани при пресичането на a и b с правата c.

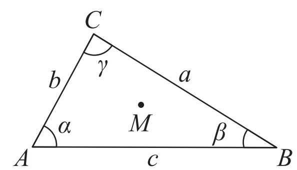


9 Определете x така, че правите s и t да са успоредни.



ТРИЪГЪЛНИК. СБОР НА ЪГЛИТЕ В ТРИЪГЪЛНИК. ВЪНШЕН ЪГЪЛ НА ТРИЪГЪЛНИК

Триъгълник наричаме геометрична фигура, която се състои от три точки, нележащи на една права, и съединяващите ги отсечки.



На чертежа $\boldsymbol{ABC}$ е триъгълник.
Триъгълникът има: **три върха –** $\boldsymbol{A, B, C}$;
три страни – $\boldsymbol{AB, BC, CA}$;
три ъгъла – $\boldsymbol{\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC, \sphericalangle ACB}$ или $\boldsymbol{\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C}$, или $\boldsymbol{\sphericalangle \alpha, \sphericalangle \beta, \sphericalangle \gamma}$.
За страните използваме означенията: $\boldsymbol{a}$ – срещу върха $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{b}$ – срещу върха $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{c}$ – срещу върха $\boldsymbol{C}$.

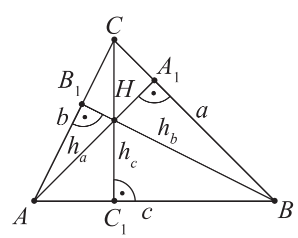
За означаване на триъгълник използваме знака Δ.

Вътрешна точка за един триъгълник е точка, която е вътрешна за всеки ъгъл на триъгълника. На чертежа точка $\boldsymbol{M}$ е вътрешна за $\Delta \boldsymbol{ABC}$.

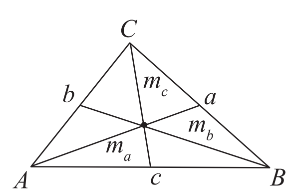
Според страните триъгълниците са: **разностранен** – трите страни са различни, **равнобедрен** – две от страните са равни, и **равностранен** – трите страни са равни.

Според ъглите триъгълниците са: **остроъгълен** – има три остри ъгъла; **правоъгълен** – има един прав ъгъл и два остри ъгъла; **тъпоъгълен** – има един тъп ъгъл и два остри ъгъла.

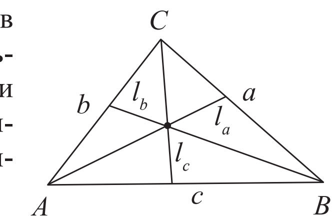
Перпендикулярът, спуснат от връх на триъгълник към правата на противоположната му страна, наричаме **височина** на триъгълника.
Във всеки триъгълник има три височини, правите на които се пресичат в една точка.
Тази точка наричаме **ортоцентър**.



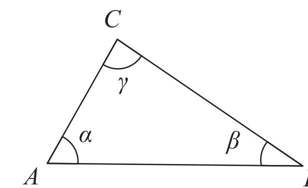
Отсечката, която съединява връх на триъгълник със средата на противоположната му страна, наричаме **медиана** на триъгълника.
Всеки триъгълник има три медиани.
Те се пресичат в една вътрешна точка, която наричаме **медицентър на триъгълника**.



Отсечката върху ъглополовящата на ъгъл в триъгълник, която съединява върха на ъгъла с пресечната точка на ъглополовящата и противоположната на върха страна на триъгълника, наричаме **ъглополовяща** на триъгълника.
Трите ъглополовящи на триъгълник се пресичат в една точка, която е вътрешна за триъгълника.



Сборът на ъглите на триъгълник е равен на 180°, т.е. $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$**.**

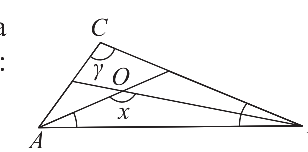


1 Намерете $\sphericalangle C$ на ΔABC, ако $\sphericalangle A = 68^\circ$ и $\sphericalangle B = 36^\circ$.

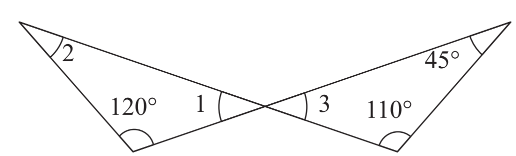
2 Намерете $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle C$ на ΔABC, ако $\sphericalangle A$ е с 34° по-голям от $\sphericalangle C$, а $\sphericalangle B = 36^\circ$.

3 Намерете ъглите α, β и γ на триъгълник, ако градусните им мерки се отнасят както $3 : 5 : 7$. Определете вида на триъгълника спрямо ъглите му.

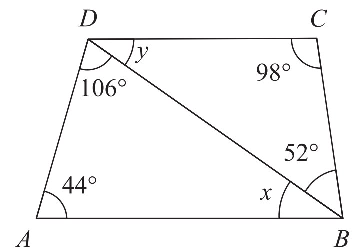
4 Намерете $\sphericalangle AOB$, където O е пресечната точка на ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ в ΔABC, ако:
а) $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 20^\circ$;
б) $\sphericalangle C = 100^\circ$.



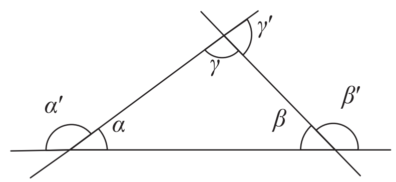
5 Намерете неизвестните ъгли $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3$ от чертежа.



6 Намерете неизвестните ъгли x и y от чертежа. Определете вида на четириъгълника $ABCD$.



Външен ъгъл на триъгълник наричаме ъгъл, който е съседен на ъгъл на триъгълника.



$\alpha' = 180° - \alpha$, $\beta' = 180° - \beta$, $\gamma' = 180° - \gamma$

Всеки ъгъл на триъгълника има по два външни ъгъла, които са равни, защото са връхни ъгли. Затова често казваме, че триъгълникът има три външни ъгъла (по един във всеки връх на триъгълника). Означаваме ги съответно с α', β' и γ'.

Понякога наричаме ъглите на триъгълника **вътрешни**, за да ги различаваме от външните ъгли.

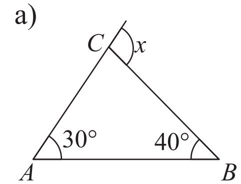
7 Начертайте триъгълник и означете всичките му шест външни ъгъла.

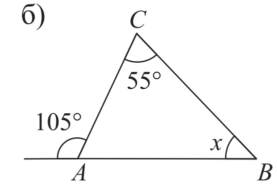
8 Намерете външните ъгли на ΔABC, ако $\sphericalangle A = 60°$ и $\sphericalangle B = 40°$. Сравнете големината на:

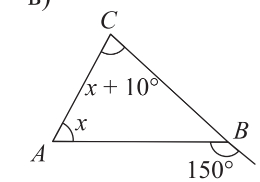
а) $\sphericalangle A'$ и $\sphericalangle B + \sphericalangle C$; б) $\sphericalangle B'$ и $\sphericalangle A + \sphericalangle C$;
в) $\sphericalangle C'$ и $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Всеки външен ъгъл на триъгълник е равен на сбора на двата вътрешни, несъседни на него ъгли.

9 Намерете неизвестните ъгли x от чертежите.

а) 

б) 

в) 

10 Намерете външните ъгли на триъгълник, ако вътрешните ъгли при два негови върха са 106° и 42°. Сравнете големината на всеки от външните ъгли с тази на несъседните му два вътрешни ъгъла.

Всеки външен ъгъл на триъгълник е по-голям от всеки несъседен с него вътрешен ъгъл.

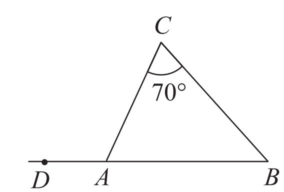
11 Един от вътрешните ъгли на триъгълник е 80°, а мерките на другите два се отнасят както 2 : 3. Намерете външните ъгли на триъгълника. Пресметнете сбора на външните ъгли.

Сборът на градусните мерки на трите външни ъгъла на триъгълник е 360°.

12 Два външни ъгъла на триъгълник са равни на 130° и 120°. Намерете мярката на третия му външен ъгъл.

13 На чертежа $\sphericalangle CAD$ е три пъти по-голям от $\sphericalangle CBA$. Колко градуса е мярката на $\sphericalangle CBA$?

а) 25° б) 35°
в) 45° г) 60°

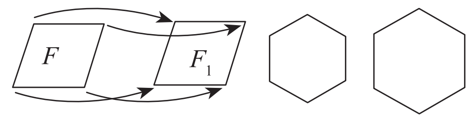


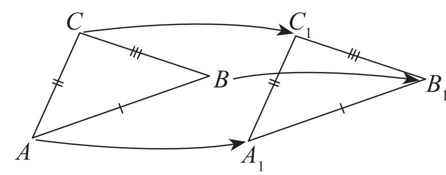
14 Един от ъглите на триъгълник е 30°, а мерките на другите два ъгъла се отнасят както 3 : 7. Колко градуса е най-големият ъгъл на триъгълника?

а) 15° б) 45° в) 105° г) 126°

ЕДНАКВИ ТРИЪГЪЛНИЦИ – ВЪВЕДЕНИЕ. ПЪРВИ ПРИЗНАК ЗА ЕДНАКВОСТ НА ДВА ТРИЪГЪЛНИКА

Казваме, че две фигури са **еднакви**, ако съвпадат при налагане. Еднаквите фигури имат една и съща форма и равни размери. Съвпадащите върхове, страни, ъгли, дъги и други елементи наричаме **съответни елементи**. Съответните елементи (без върховете) са равни. На чертеж съответните елементи на еднаквите фигури означаваме с един и същ символ. За означаване на еднаквостта на две фигури използваме символа ≅. Записваме $F \cong F_1$ ($\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$) и четем: „Фигурата F е еднаква на фигурата F_1“ („ΔABC е еднакъв на $\Delta A_1B_1C_1$“).



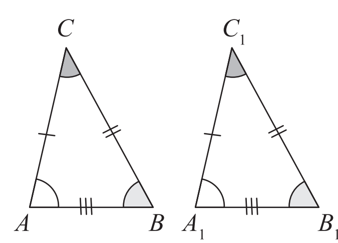


Договаряме се при използване на този запис редът на буквите да определя съответните двойки върхове на еднаквите фигури.

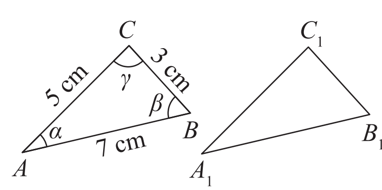
$$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1}$$

Тъй като налагането на фигурите невинаги може да се осъществи, за откриването на двойка еднакви триъгълници може да използваме определението:

Два триъгълника наричаме **еднакви**, ако съответните им страни **са равни** и съответните им ъгли **са равни**.



(1) Ако страните на ΔABC са с големината, показана на чертежа, ъглите му са $\alpha = 35°$, $\beta = 67°$ и $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$, определете страните и ъглите на $\Delta A_1B_1C_1$. Намерете обиколките на триъгълниците и ги сравнете.



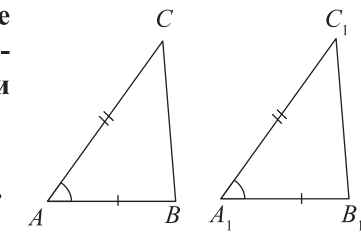
От определението следва, че за да може да разпознаем два еднакви триъгълника, трябва да установим равенството на страните и ъглите им.

Оказва се, че двойка еднакви триъгълници може да се открият и с

Първи признак за еднаквост на триъгълници:

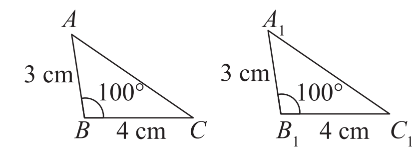
Два триъгълника са еднакви, ако две страни и ъгъл между тях от единия триъгълник са съответно равни на две страни и ъгъл между тях от другия триъгълник.

Ако $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$, то $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

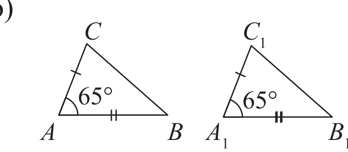


(2) Кои двойки триъгълници са еднакви?

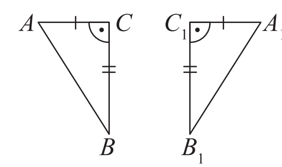
а)



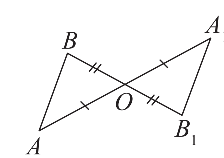
б)



в)

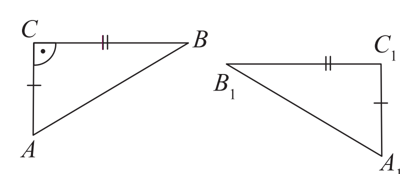


г)

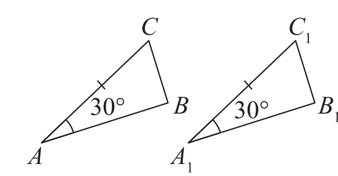


(3) Какви допълнителни условия за елементите на единия от дадените триъгълници са необходими, за да са еднакви по първи признак?

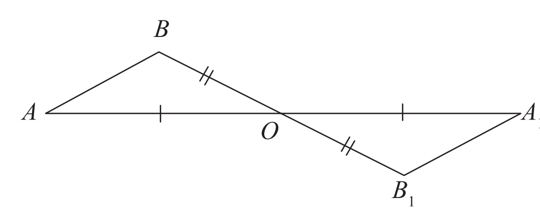
а)



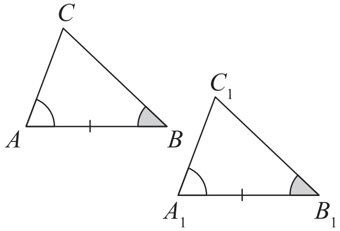
б)



(4) Еднакви ли са ΔAOB и ΔA_1OB_1 от чертежа?

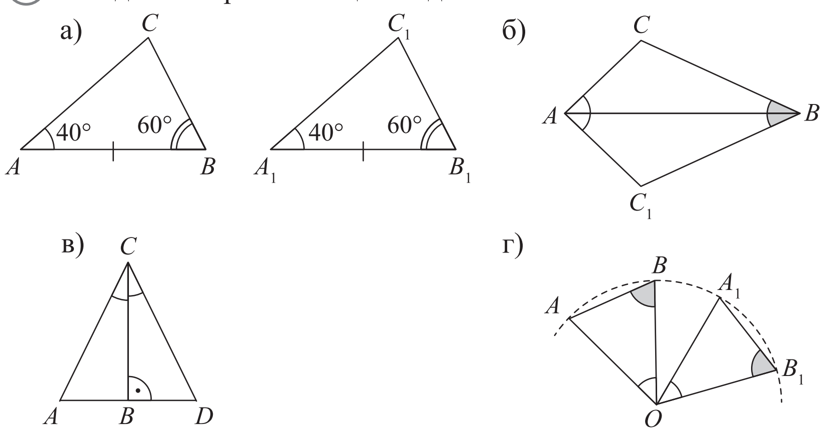


ВТОРИ ПРИЗНАК ЗА ЕДНАКВОСТ НА ДВА ТРИЪГЪЛНИКА

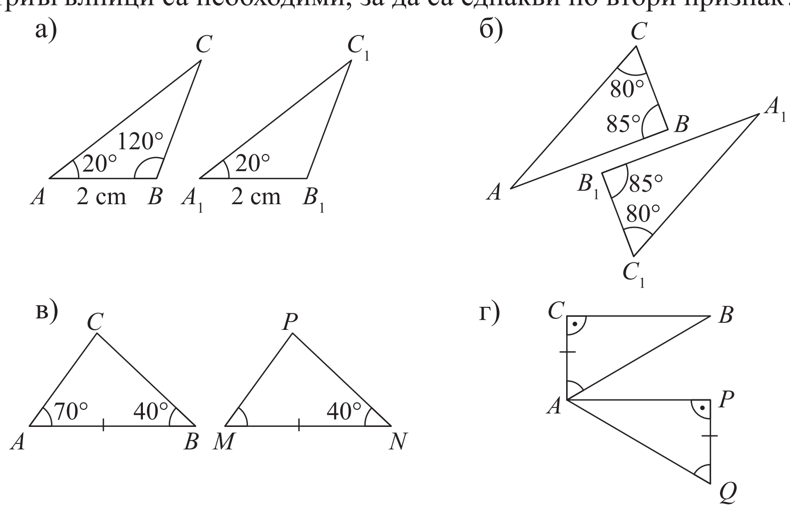


Два триъгълника са еднакви, ако страна и прилежащите ъгли от единия триъгълник са съответно равни на страна и прилежащите ъгли от другия триъгълник.
Ако $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, то $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

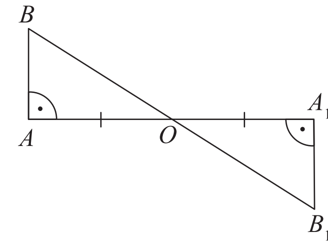
1 Кои двойки триъгълници са еднакви?



2 Какви допълнителни условия за елементите на единия от дадените триъгълници са необходими, за да са еднакви по втори признак?

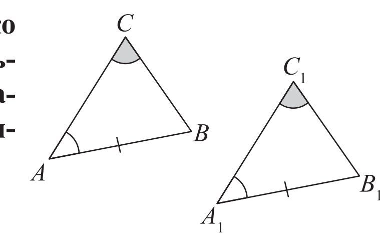


3 Еднакви ли са $\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$ от чертежа?

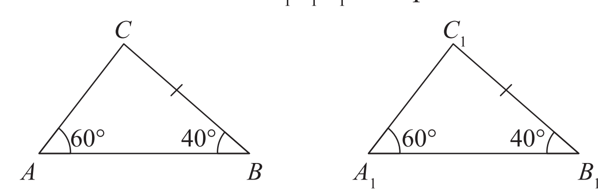


Знаем, че сборът от ъглите в един триъгълник е 180°. Следователно, ако два от ъглите на един триъгълник са съответно равни на два от ъглите на друг триъгълник, то и третите им ъгли са равни. От това следва, че може да изкажем втори признак за еднаквост на два триъгълника и по друг начин:

Два триъгълника са еднакви, ако страна и два ъгъла от единия триъгълник са съответно равни на страна и два ъгъла от другия триъгълник.



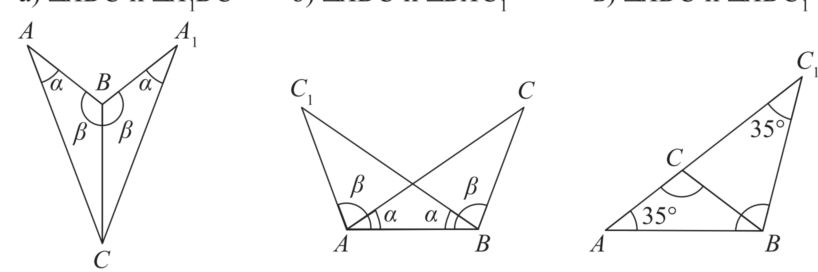
4 Еднакви ли са $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ от чертежа?



Важно свойство на еднаквите триъгълници е:

В еднаквите триъгълници съответните им медиани, височини и ъглополовящи са равни.

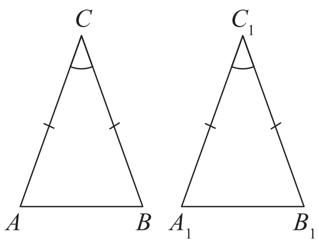
5 Еднакви ли са триъгълниците?
а) $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$ б) $\triangle ABC$ и $\triangle BAC_1$ в) $\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$



РАВНОБЕДРЕН ТРИЪГЪЛНИК. РАВНОСТРАНЕН ТРИЪГЪЛНИК

Триъгълник с две равни страни наричаме **равнобедрен**.

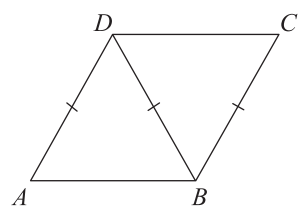
Триъгълник с три равни страни наричаме **равностранен**.



От първи признак за еднаквост на триъгълници следва:

Два равнобедрени триъгълника са еднакви, ако бедро и ъгъл между бедрата от единия триъгълник са съответно равни на бедро и ъгъл между бедрата от другия триъгълник.

1 Еднакви ли са ΔABD и ΔCDB от чертежа, ако $AB \parallel CD$?



За всеки равнобедрен триъгълник са в сила свойствата:
- Ъглите при основата му са равни.
- Медианите към бедрата му са равни.
- Височините към бедрата му са равни.
- Ъглополовящите към бедрата му са равни.

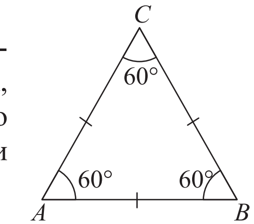
2 Намерете ъглите на равнобедрен триъгълник, ако ъгълът при върха му е:
а) 30°; б) 120°; в) 90°; г) 106°.

3 Намерете ъглите на равнобедрен триъгълник, ако ъгълът при основата му е:
а) 55°; б) 72°; в) 32°; г) 45°.

4 Може ли ъгълът при основата на равнобедрен триъгълник да е:
а) остър; б) прав; в) тъп?

5 Намерете градусната мярка на ъглите на равностранен триъгълник.

Решение: В равностранния триъгълник и трите страни са равни. Тогава той е равнобедрен триъгълник, в който всяка двойка ъгли може да разглеждаме като ъгли при основата му. Следователно всичките му ъгли са равни и мерките им са 180° : 3 = 60°.



В равностранния триъгълник всички ъгли са равни.

6 Кое от следните твърдения е вярно?
а) Всеки равнобедрен триъгълник е равностранен.
б) Всеки равностранен триъгълник е равнобедрен.
в) Има равностранен триъгълник, който не е равнобедрен.

7 Намерете ъглите на равнобедрен триъгълник, ако един от тях е 60°.

Решение: *I случай.* Ако един от ъглите при основата на равнобедрения триъгълник е 60°, тогава и другият е 60°, защото ъглите при основата са равни. За ъгъла при върха получаваме 180° – (60° + 60°) = 60°.

II случай. Ако ъгълът при върха на равнобедрения триъгълник е 60°, тогава за ъглите при основата остава 180° – 60° = 120°. Но те са равни (свойството на равнобедрения триъгълник). Тогава мярката на ъглите при основата е 120° : 2 = 60°.

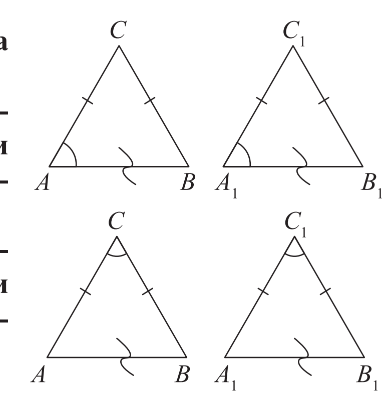
И в двата случая получаваме, че всички ъгли на триъгълника са по 60°.

Тогава в сила е следното свойство:

Равнобедрен триъгълник с ъгъл, равен на 60°, е равностранен.

От втори признак за еднаквост на триъгълници и свойството на равнобедрени триъгълници следва:

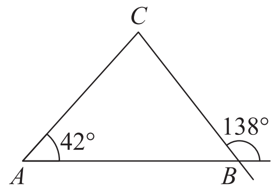
Два равнобедрени триъгълника са еднакви, ако:
1. Основа и ъгъл при основата от единия триъгълник са съответно равни на основа и ъгъл при основата от другия триъгълник;
2. Основа и ъгъл при върха от единия триъгълник са съответно равни на основа и ъгъл при върха от другия триъгълник.



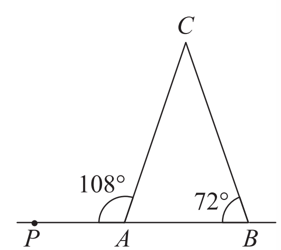
8 Еднакви ли са два равнобедрени триъгълника, ако основите им са равни, ъгълът при върха на единия триъгълник е 36°, а ъгълът при основата на другия триъгълник е 72°?

Признак, по който (освен по определението) може да открием равнобедрен триъгълник: **Ако в един триъгълник два ъгъла са равни, той е равнобедрен.**

9 Равнобедрен ли е ΔABC от чертежа?



10 Намерете $P_{\Delta ABC}$, ако $\sphericalangle ABC = 72°$, $\sphericalangle PAC = 108°$, $AB = 4{,}33$ cm и $BC = 7$ cm.



Решение: $\sphericalangle PAC + \sphericalangle BAC = 180°$, т.е.

$\sphericalangle BAC = 180° – 108° = 72° = \sphericalangle ABC$. Следователно ΔABC е равнобедрен, т.е. $AC = BC = 7$ cm. Получаваме $P_{\Delta ABC} = 4{,}33 + 7 + 7 = 18{,}33$ cm.

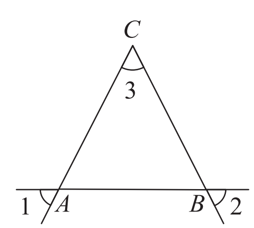
Признаци, по които (освен по определението) може да откриваме равностранен триъгълник:

1. Един триъгълник е равностранен, ако трите му ъгъла са равни.

2. Един триъгълник е равностранен, ако е равнобедрен триъгълник с ъгъл, равен на 60°.

11 Ако $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, а $\sphericalangle 3 = 60°$, какъв е ΔABC?

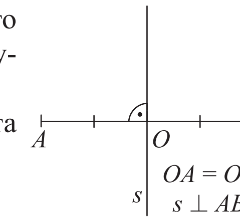
А) равнобедрен
Б) равнобедрен остроъгълен
В) разностранен
Г) равностранен



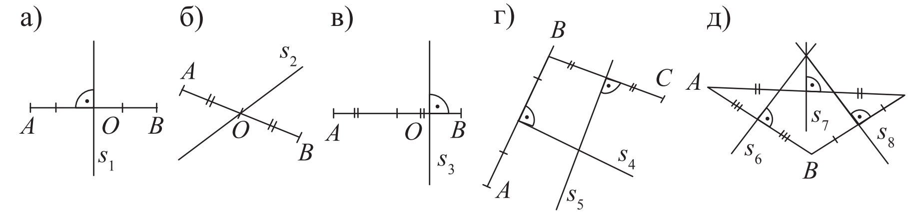
СИМЕТРАЛА НА ОТСЕЧКА

Симетрала на отсечка наричаме правата, която минава през средата на отсечката и е перпендикулярна на нея.

На чертежа правата $\boldsymbol{s}$ е симетрала на отсечката AB. Означаваме я с $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}_{AB}$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ и т.н.

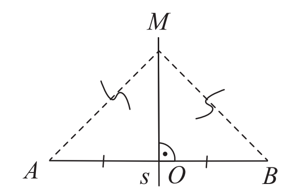


1 Кои от начертаните прави са симетрали на отсечките AB, BC и AC?



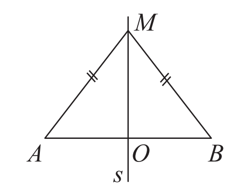
Всяка точка от симетралата на една отсечка е на равни разстояния от краищата ѝ.

На чертежа $MA = MB$, защото точка $M \in \boldsymbol{s}$.

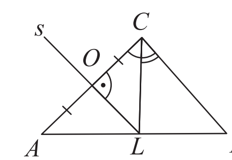


Вярно е и обратното: **Всяка точка, която се намира на равни разстояния от краищата на една отсечка, е точка от симетралата на отсечката.**

На чертежа $MA = MB$, следователно $M \in \boldsymbol{s}$.

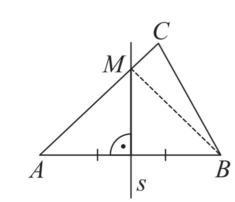


2 На чертежа CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ на ΔABC, а OL е симетрала на страната AC на ΔABC. Ако $\sphericalangle ACB = 100°$, намерете $\sphericalangle CAB$.



Решение: CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, следователно $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCB = 100° : 2 = 50°$, но $L \in s$, тогава $AL = CL$, следователно $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LAC = 50°$.

3 Точката M е пресечната точка на страната AC на ΔABC със симетралата на страната AB на ΔABC. Ако $BC = 9$ cm и $AC = 12$ cm, намерете $P_{\Delta MBC}$.

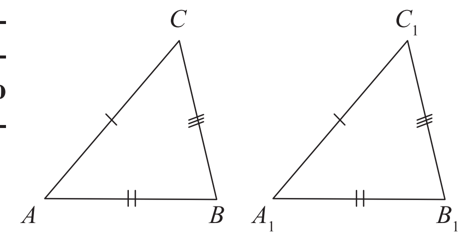


Решение: Тъй като точката M е от симетралата на страната AB на ΔABC, то $MA = MB$. Тогава

$P_{\Delta MBC} = MC + MB + BC = (MC + MA) + BC = AC + BC = 12 + 9 = 21$ см.

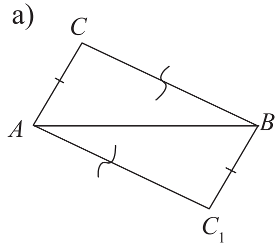
ТРЕТИ ПРИЗНАК ЗА ЕДНАКВОСТ НА ДВА ТРИЪГЪЛНИКА

Два триъгълника са еднакви, ако трите страни на единия триъгълник са съответно равни на трите страни на другия триъгълник.

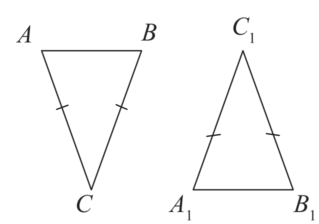


1 Кои двойки триъгълници са еднакви?

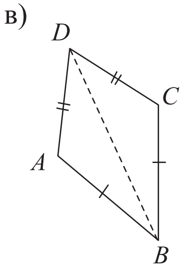
а)



б)

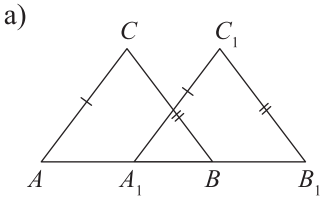


в)

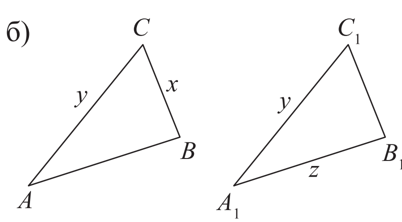


2 Какво допълнително условие е необходимо, за да са еднакви по трети признак двойките триъгълници?

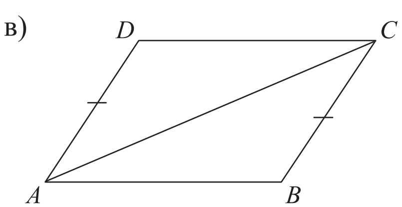
а)



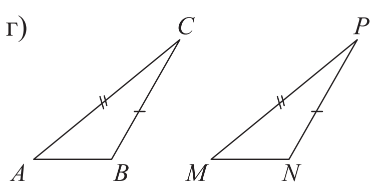
б)



в)

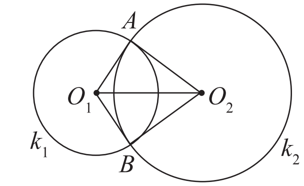


г)



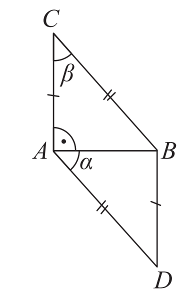
3 Според кой признак $\Delta O_1AO_2 \cong \Delta O_1BO_2$?

а) първи признак
б) втори признак
в) трети признак
г) Не може да се определи.



4 Ако $AC = BD$, $BC = AD$, $\sphericalangle\alpha = 50^\circ$ и $\sphericalangle\beta = 40^\circ$:

а) намерете ъглите на двата триъгълника;
б) докажете, че $AD \parallel BC$;
в) докажете, че $AC \parallel BD$.



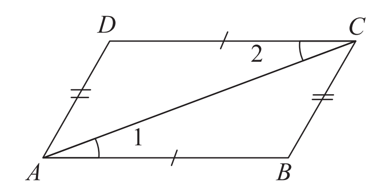
Решение: а) По трети признак $\Delta ABD \cong \Delta BAC$, защото по условие $BD = AC$, $AD = BC$ и AB е обща. Тогава съответните ъгли на триъгълниците са равни.
$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 40^\circ$; $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 50^\circ$;
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAB = 90^\circ$.

б) От $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ – кръстни за $(AD, BC) \times AB$, следва $AD \parallel BC$.

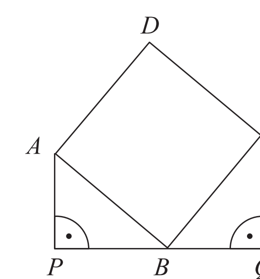
в) От $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAB = 90^\circ$ – кръстни за $(BD, AC) \times AB$, следва $AC \parallel BD$.

5 На чертежа $AB = CD$ и $BC = AD$.

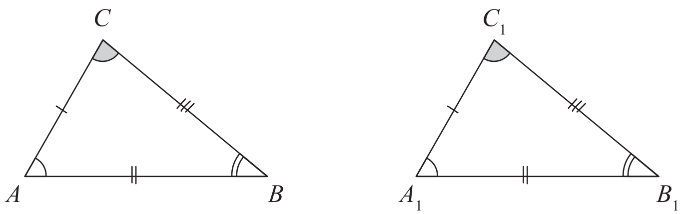
Ако $\sphericalangle 1 = 35^\circ$, намерете $\sphericalangle 2$.



6 На чертежа $ABCD$ е квадрат и $AP = BQ$. Какво допълнително условие е необходимо, за да е изпълнено $\Delta APB \cong \Delta BQC$ по трети признак?



ЕДНАКВИ ТРИЪГЪЛНИЦИ – ОБОБЩЕНИЕ



$\Delta ABC \cong A_1B_1C_1$, ако

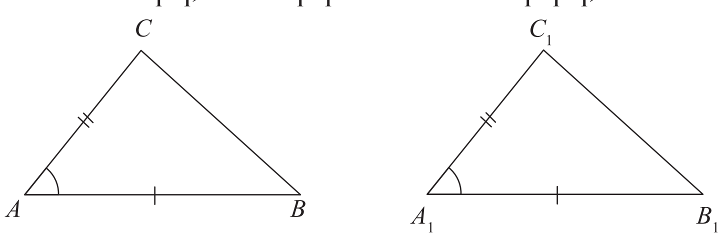
$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$

Признаци за еднаквост

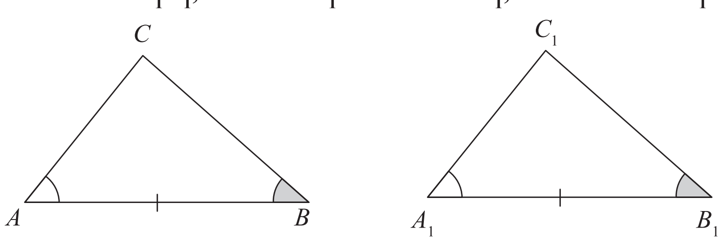
Първи признак за еднаквост

Ако $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$, то $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

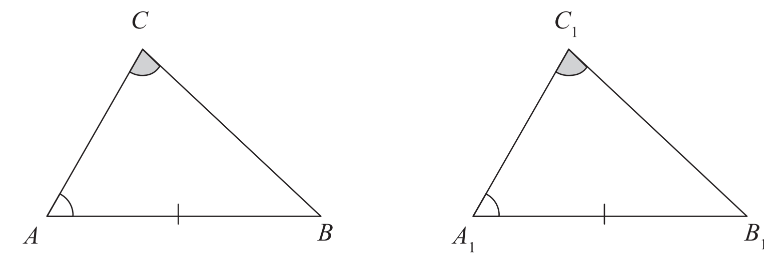


Втори признак за еднаквост

Ако $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, то $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

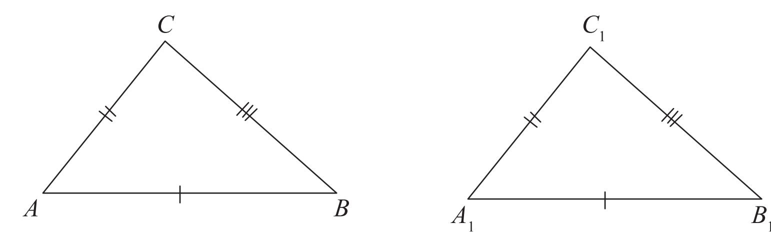


Ако $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$, то $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.



Трети признак за еднаквост

Ако $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.



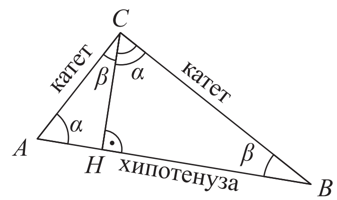
ПРАВОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ЪГЪЛ 30°. МЕДИАНА КЪМ ХИПОТЕНУЗАТА В ПРАВОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК

Триъгълник с един прав ъгъл и два остри ъгъла наричаме **правоъгълен**.

Страната срещу правия ъгъл наричаме **хипотенуза**, а другите две страни – **катети**.

Тъй като сборът на ъглите в триъгълника е 180°, сборът от острите ъгли на правоъгълния триъгълник е 90°, т.е.

$\alpha + \beta = 90°$.



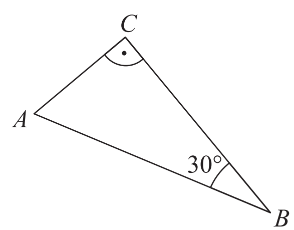
(1) Намерете един от острите ъгли на правоъгълен триъгълник, ако другият му остър ъгъл е:

а) 37°; б) 60°; в) 45°.

(2) Градусните мерки на острите ъгли на правоъгълен триъгълник се отнасят както 2 : 7. Намерете мерките им.

Правоъгълен триъгълник с остър ъгъл 30° има следното важно свойство:

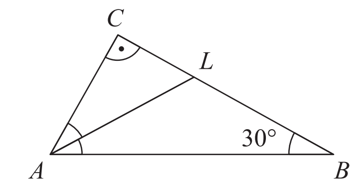
Катетът, лежащ срещу ъгъл 30° в правоъгълен триъгълник, е равен на половината от хипотенузата.



На чертежа $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 90°$, $AC = \frac{1}{2}AB$ и $AB = 2AC$.

(3) Даден е ΔABC, за който $\sphericalangle C = 90°$, а $\sphericalangle B = 30°$. Намерете:
а) AB, ако $AC = 12,4$ cm;
б) AC, ако $AB = 16$ cm;
в) AB и AC, ако $AB + AC = 18$ cm;
г) AB и AC, ако $AB - AC = 9$ cm.

(4) Даден е ΔABC, за който $\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ и AL е ъглополовяща на $\sphericalangle A$. Ако:
а) $CL = 4$ cm, намерете BC;
б) $BL = 7,2$ cm, намерете BC;
в) $BC = 15$ cm, намерете AL.



(5) Ъгълът при върха на равнобедрен триъгълник е 30°, а бедрото му е 16 cm. Намерете височината към бедро на триъгълника и лицето му.

(6) Ъгълът при основата на равнобедрен триъгълник е 75°. Намерете бедрото му, ако височината към него е 5,6 cm.

Ако в правоъгълен триъгълник катет е равен на половината от хипотенузата, ъгълът срещу този катет е 30°.

(7) Даден е правоъгълен ΔABC ($\sphericalangle C = 90°$), за който $AB = 32$ cm и $BC = 16$ cm. Намерете ъглите на триъгълника.

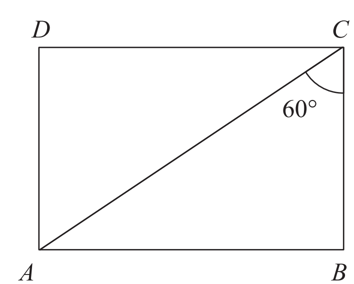
(8) Даден е правоъгълен ΔABC с $\sphericalangle C = 90°$ и $AB = 2AC$. Колко градуса е $\sphericalangle A$?

а) 30° б) 45° в) 60° г) Не може да се определи.

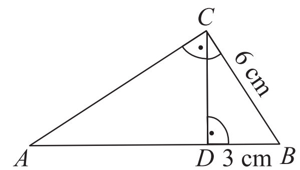
(9) Височината към бедрото на равнобедрен триъгълник е 7 cm, а бедрото му е 14 cm. Намерете ъглите на триъгълника.

(10) На чертежа $ABCD$ е правоъгълник, за който $\sphericalangle ACB = 60°$ и $AB = 7$ cm.

Ако $P_{ABCD} = 24$ cm, намерете AC.



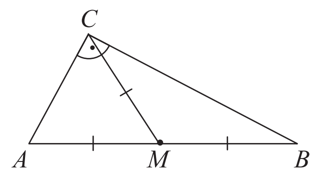
(11) Ако $BD = 3$ cm и $BC = 6$ cm, намерете AB и AD.



Медианата в правоъгълен триъгълник има следното свойство:

Медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник е равна на половината от хипотенузата.

На чертежа $AB = 2CM$.

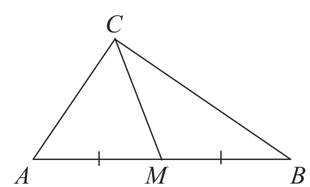


(12) В правоъгълен ΔABC $\sphericalangle C = 90°$ и $AB = 24$ dm. Намерете медианата CM.

(13) В правоъгълен ΔABC ($\sphericalangle C = 90°$) медианата $CM = 13$ cm. Намерете хипотенузата AB.

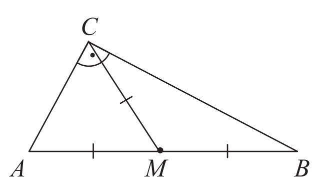
Признак за правоъгълен триъгълник:

Ако една от страните на триъгълник е два пъти по-голяма от медианата към нея, триъгълникът е правоъгълен с хипотенуза тази страна.



(14) На чертежа CM е медиана в ABC, $CM = 5$ cm, $P_{\Delta ABC} = 24$ cm, а $AC + BC = 14$ cm. Какъв е видът на ΔABC?

А) остроъгълен
Б) тъпоъгълен
В) правоъгълен
Г) равностранен

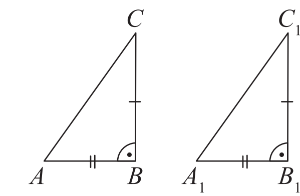


(15) Обиколката на правоъгълен ΔABC ($\sphericalangle C = 90°$) е 48 cm, катетът $AC = 12$ cm, а $AB = 20$ cm. Намерете $P_{\Delta BCM}$, където M е средата на AB.

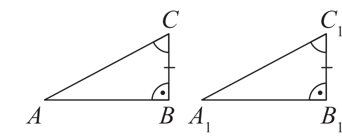
ПРИЗНАК ЗА ЕДНАКВОСТ НА ДВА ПРАВОЪГЪЛНИ ТРИЪГЪЛНИКА

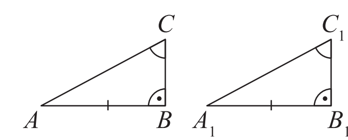
Следствия от признаците за еднаквост:

Два правоъгълни триъгълника са еднакви, ако катетите на единия триъгълник са съответно равни на катетите на другия.



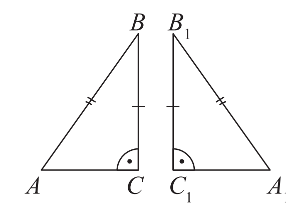
Два правоъгълни триъгълника са еднакви, ако катет и остър ъгъл от единия триъгълник са съответно равни на катет и остър ъгъл от другия.





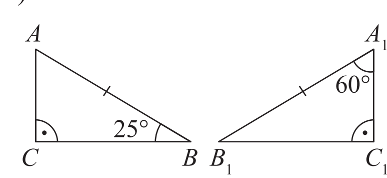
Специален признак за еднаквост на правоъгълни триъгълници:

Два правоъгълни триъгълника са еднакви, ако катет и хипотенуза от единия триъгълник са съответно равни на катет и хипотенуза от другия триъгълник.

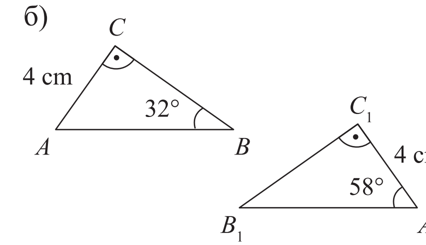


(1) Еднакви ли са ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$?

а)

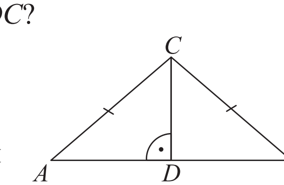


б)



(2) По кой признак са еднакви ΔADC и ΔBDC?

А) първи признак
Б) втори признак
В) трети признак
Г) признак за еднаквост на правоъгълни триъгълници

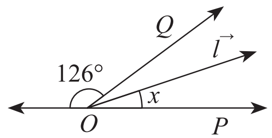


ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ЪГЪЛ

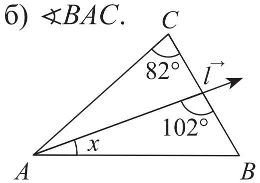
Вътрешният лъч за даден ъгъл, който го разделя на две равни части, наричаме **ъглополовяща на ъгъла**.

1) Намерете мярката на ъгъл x, ако $\vec{l}$ е ъглополовяща на:

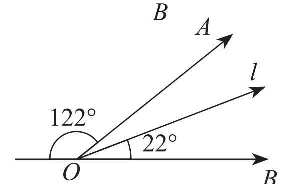
а) $\sphericalangle POQ$;



б) $\sphericalangle BAC$.

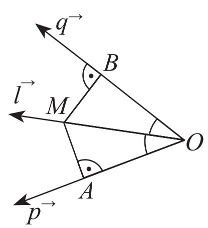


2) Ъглополовяща ли е $\vec{l}$ на $\sphericalangle AOB$?



Свойство на точките от ъглополовящата на ъгъл:

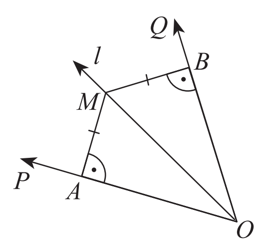
Всяка точка от ъглополовящата на ъгъл се намира на равни разстояния от рамената на ъгъла.



Вярно е и обратното:

Ако вътрешна точка на ъгъл е на равни разстояния от рамената му, точката е от ъглополовящата на ъгъла.

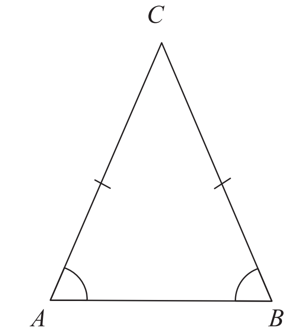
3) Точката M е вътрешна за $\sphericalangle POQ$ и е на равни разстояния от рамената на ъгъла – на чертежа $MA = MB$. Ако $MA = 5$ cm, а $OM = 10$ cm, намерете мярката на $\sphericalangle AOB$.



4) Лъчът $\vec{l}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle POQ = 60°$. Точката $M \in \vec{l}$, като $OM = 12$ cm. Намерете разстоянието от точка M до $\overrightarrow{OP}$ и до $\overrightarrow{OQ}$.

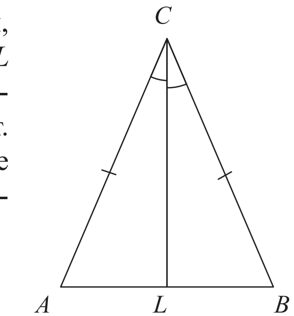
ВИСОЧИНА, ЪГЛОПОЛОВЯЩА И МЕДИАНА В РАВНОБЕДРЕН ТРИЪГЪЛНИК

Дотук знаем, че в равнобедрен триъгълник:
- две от страните му са равни;
- ъглите срещу равните страни са равни.



1) В равнобедрения ΔABC CL е ъглополовяща. Еднакви ли са ΔALC и ΔBLC?

Решение: От условието, че ΔABC е равнобедрен, следва $AC = BC$; CL е обща страна; $\sphericalangle ACL = \sphericalangle BCL$, защото CL е ъглополовяща. Следователно $\Delta ALC \cong \Delta BLC$ по първи признак за еднаквост. Тогава съответните им елементи са равни, т.е $AL = BL$ и $\sphericalangle ALC = \sphericalangle BLC$. Но тези ъгли са съседни, т.е. $\sphericalangle ALC = \sphericalangle BLC = 90°$.



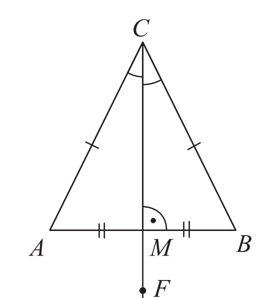
Оказва се, че ъглополовящата CL е също така медиана и височина.

За равнобедрен триъгълник е в сила и следното свойство:

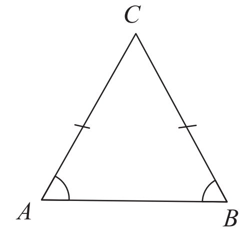
В равнобедрения триъгълник ъглополовящата на ъгъла при върха му, медианата и височината, построени от върха, съвпадат.

2) Ако ΔABC е равнобедрен ($AC = BC$), $\overrightarrow{CL}$ е ъглополовяща, $AB = 18$ cm и $\sphericalangle CAB = 72°$, намерете:

а) $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ACL$, $\sphericalangle ALC$;
б) AL и BL.



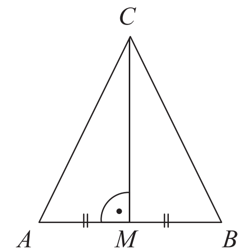
3 В ΔABC $AC = BC$ и CM е медиана, а $\sphericalangle ACM = 34°30'$. Намерете $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle AMF$.



Дотук знаем, че един триъгълник е равнобедрен, ако:

- две от страните му са равни;
- два от ъглите му са равни.

4 В ΔABC медианата CM е и височина. Равнобедрен ли е ΔABC?

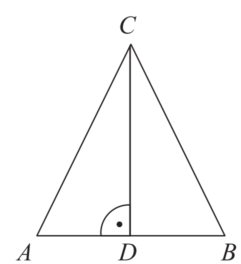


Решение: По условие CM е височина и медиана. От това следва, че $AM = BM$, $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMC = 90°$; CM е обща за ΔAMC и ΔBMC. Следователно по първи признак $\Delta AMC \cong \Delta BMC$. От това следва, че $AC = BC$ като съответни елементи в еднакви триъгълници, т.е. ΔABC е равнобедрен.

Друг признак, по който може да познаем, че един триъгълник е равнобедрен, е:

Триъгълникът е равнобедрен, ако два от елементите – височина, медиана или ъглополовяща, построени от един връх на триъгълника, съвпадат.

5 В ΔABC точка D е от страната AB, $AD = 3$ cm, $AB = 6$ cm и $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC$. Намерете $P_{\Delta ABC}$, ако $AC = 5$ cm.



Решение: В ΔABC CD е ъглополовяща. По условие $AD = 3$ cm и $AB = 6$ cm, т.е. $BD = 6 - 3 = 3$ cm. Следователно D е среда на AB, т.е. CD е медиана. Тъй като CD е височина и медиана, следва, че ΔABC е равнобедрен. Следователно $AC = BC = 5$ cm и

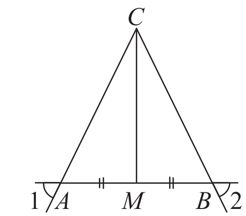
$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 6 + 5 + 5 = 16$ cm.

6 В ΔABC точка D е от страната AB и е такава, че $\sphericalangle ACD = 15°$ и $CD \perp AB$. Ако $\sphericalangle ACB = 30°$ и $AC = 5$ cm, намерете BC.

7 На чертежа $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = 60°$ и $AM = BM = 4$ cm. Намерете:

а) $\sphericalangle AMC$ и $\sphericalangle ACM$;

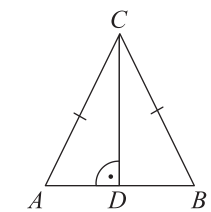
б) $P_{\Delta ABC}$.



Решение: а) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle 1 = 60°$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle 2 = 60°$ – връхни ъгли. Следователно $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 60°$, т.е. ΔABC е равнобедрен с ъгъл, равен на 60°, т.е. триъгълникът е равностранен. Следователно медианата CM е височина и ъглополовяща, т.е. $\sphericalangle AMC = 90°$, а $\sphericalangle ACM = 90° - 60° = 30°$.

б) Тъй като ΔABC е равностранен, следва, че $P_{\Delta ABC} = 3 \,.\, 8 = 24$ cm.

8 В равнобедрения ΔABC ($AC = BC$) CD е височина ($D \in AB$), $\sphericalangle ACD = 25°$ и $BD = 2{,}5$ cm. Намерете ъглите на триъгълника и дължината на основата му.

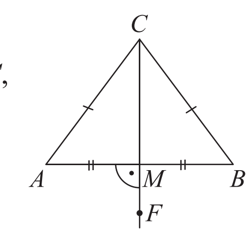


Решение: От свойството на равнобедрения ΔABC следва, че височината CD е медиана и ъглополовяща. Следователно $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = 25°$, т.е.
$\sphericalangle ACB = 25° + 25° = 50°$. Тогава $\sphericalangle A = \sphericalangle B = (180° - 50°) : 2 = 65°$.
$AD = BD = 2{,}5$ cm, т.е. $AB = 2{,}5 + 2{,}5 = 5$ cm.

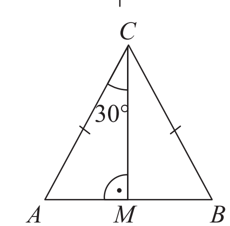
9 В равнобедрения ΔABC ($AC = BC$) CM е медиана ($M \in AB$). Ако $\sphericalangle ACM = 50°$ и $BM = 8$ cm, намерете ъглите на триъгълника и дължината на основата му.

10 В ΔABC са дадени равенствата $AC = BC$, $\sphericalangle AMF = 90°$, $AM = 8$ cm и $\sphericalangle ABC = 55°$. Намерете:

а) AB; б) $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ACM$.



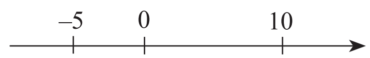
11 На чертежа ΔABC е равнобедрен ($AC = BC$) и CM е височина ($M \in AB$). Ако $\sphericalangle ACM = 30°$, определете вида на триъгълника.



ЧИСЛОВИ НЕРАВЕНСТВА. СВОЙСТВА

Ще припомним някои познати свойства на числата:

● От две рационални числа по-голямо е това, което се изобразява по-надясно върху числова ос; по-малко е това, което се изобразява по-наляво.



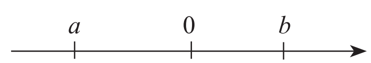
$-5 < 0$, $0 < 10$

● За всеки две рационални числа a и b е изпълнено точно едно от сравненията: a е равно на b ($a = b$) или a е по-малко от b ($a < b$), или a е по-голямо от b ($a > b$).

Записът $a \leq b$ означава, че $a < b$ или $a = b$.

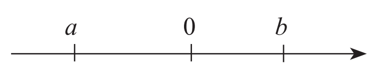
Записът $a \geq b$ означава, че $a > b$ или $a = b$.

● Всяко положително число a е по-голямо от нулата и от всяко отрицателно число b.



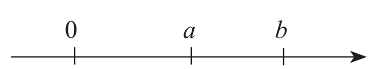
$a > 0$
$a > b$

● Всяко отрицателно число a е по-малко от нулата и от всяко положително число b.



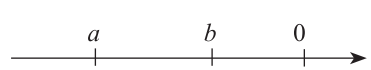
$a < 0$
$a < b$

● От две положителни числа a и b по-голямо е това, което има по-голям модул.



$|b| > |a|$
$b > a$

● От две отрицателни числа a и b по-голямо е това, което има по-малък модул.



$|b| < |a|$
$b > a$

● За рационалните числа a и b е вярно:

$a = b$ точно когато $a - b = 0$;
$a < b$ точно когато $a - b < 0$;
$a > b$ точно когато $a - b > 0$;
$a \leq b$ точно когато $a - b \leq 0$;
$a \geq b$ точно когато $a - b \geq 0$.

Два числови израза, свързани с някой от знаците $<$, $>$, $\leq$ или $\geq$, образуват **числово неравенство**.

Едно неравенство наричаме **строго**, ако е записано със знак $<$ или $>$.

Едно неравенство наричаме **нестрого**, ако е записано със знак $\leq$ или $\geq$.

1 Сравнете числата.

а) $-\frac{5}{2}$ и $-2{,}5$ б) 1,5 и 4 в) –1 и –2

2 Пресметнете стойностите на изразите U и V и ги сравнете, ако:

а) $U = 2 - 3 \,.\, 4$, $V = 0{,}25 : 0{,}5$; б) $U = 6 : (-2)$, $V = -10 + 9$.

Решение: а) Имаме $U = 2 - 3 \,.\, 4 = 2 - 12 = -10$, $V = 0{,}25 : 0{,}5 = 0{,}5$.
Понеже $-10 < 0{,}5$, казваме, че е вярно неравенството $U < V$.

б) Имаме $U = 6 : (-2) = -3$, $V = -10 + 9 = -1$.
Понеже $-3 \leq -1$, казваме, че неравенството $U > V$ е невярно.

За неравенство между числови изрази казваме, че е **вярно (невярно)**, когато е вярно (невярно) съответното неравенство между техните числени стойности.

3 Сравнете числата и сравнете разликата им с числото 0.

а) 7 и 2 б) –8 и 3 в) –4,5 и –5 г) 6,3 и –4

Решение:

а) $7 > 2$, $7 - 2 = 5$, $7 - 2 > 0$;
б) $-8 < 3$, $-8 - 3 = -11$, $-8 - 3 < 0$;
в) $-4{,}5 > -5$, $-4{,}5 - (-5) = 0{,}5$, $-4{,}5 - (-5) > 0$

4 Вярно или невярно е неравенството?

а) $7 : 2 - 8 : 2 < 4{,}5 \,.\, 4$ б) $2{,}5 + 0{,}4 < -10 : 5$

За изразите U, V, W и T и числото a е вярно:

- Ако $U < V$, то $V > U$;

- Ако $U < V$ и $V < W$, то $U < W$;

- Ако $U < V$, то $U + W < V + W$ и $U - W < V - W$, т.е. ако към двете страни на вярно числово неравенство прибавим или извадим от тях числов израз, получаваме пак вярно неравенство;

- Ако $U < V + W$, то $U - V < W$, т.е. ако във вярно числово неравенство прехвърлим събираемо от едната в другата му страна с противоположен знак, получаваме също вярно неравенство;

- Ако $U < V$ и $a > 0$, то $aU < aV$ и $U : a < V : a$, т.е. ако двете страни на вярно числово неравенство умножим (разделим) с положително число, отново ще получим вярно неравенство;

- Ако $U < V$ и $a < 0$, то $aU > aV$ и $U : a > V : a$, т.е. ако двете страни на вярно числово неравенство умножим (разделим) с отрицателно число и сменим посоката на неравенството, отново ще получим вярно неравенство;

- Ако $U < V$ и $W < T$, то $U + W < V + T$, т.е. ако съберем почленно еднопосочни неравенства, отново ще получим вярно неравенство (за разлика от равенствата не може да изваждаме неравенства).

От тези свойства получаваме следните важни следствия:

Ако U, V и W са изрази, а числото $a > 0$ ($a < 0$), неравенствата $U < V$, $U + W < V + W$ и $aU < aV$ ($aU > aV$) са едновременно верни или неверни.

Неравенствата $U + V < W$ и $U < W - V$ също са едновременно верни или неверни.

Подобни свойства имат и неравенствата, записани със знаците $>$, $\le$ и $\ge$.

5 Запишете неравенството, което се получава, ако:

а) към двете страни на неравенството $9 > -4$ прибавите 4;

б) от двете страни на неравенството $\frac{1}{2} - \le -3{,}5$ извадите $\frac{1}{2}$;

в) двете страни на неравенството $\frac{7}{2} - 1{,}5 < 4{,}5 - 2$ умножите с -2;

г) двете страни на неравенството $8 - 3 \ge 2{,}5 + 1$ умножите с -2;

д) двете страни на неравенството $-3 - 6 < -6{,}3$ разделите с -3.

6 Приложете означеното свойство.

а) $5 < 6 \mid +0{,}7$ б) $-4 > -8 \mid -4$

в) $4{,}2 - 3 < 1{,}4 \mid .\,2$ г) $6 - 2 < 18 - 6 \mid :2$

7 Обяснете как от първото неравенство следва второто.

а) $12 > -4$, $8 > -8$

б) $0{,}5 < 1{,}5$, $1 < 3$

в) $6 - 3 < 2{,}2 + 2$, $6 < 3 + 2{,}2 + 2$

г) $27 - 9 > -18 + 12$, $9 - 3 > -6 + 4$

8 Запишете със знаците $<$, $>$, $\le$ или $\ge$ твърдението:

а) $-|5 - 3{,}5|$ е отрицателно число;

б) $-2(2 - 7{,}5)$ е положително число;

в) $|x|$ е неотрицателно число;

г) 10 е по-голямо от a;

д) b е не по-голямо от 7;

е) c е по-малко от $a - b$.

9 Сравнете числата a и b, ако $a - b$ е:

а) 0; б) 5; в) -3.

10 Кои неравенства са верни?

а) $2 - 5\frac{1}{4} < 2 + 5\frac{1}{4}$

б) $2 \,.\, (-3) \ge 2 \,.\, 3$

в) $4\frac{1}{2} + |-3| \le 4\frac{1}{2} - (-3)$

г) $5 \,.\, (-0{,}2) < -5 \,.\, (0{,}2)$

НЕРАВЕНСТВО С ЕДНО НЕИЗВЕСТНО. ЕКВИВАЛЕНТНИ НЕРАВЕНСТВА. ЛИНЕЙНО НЕРАВЕНСТВО С ЕДНО НЕИЗВЕСТНО

Неравенство между изрази с една променлива наричаме **неравенство с едно неизвестно**.

Когато в неравенство заместим променливата x с конкретно число, в зависимост от стойността на променливата може да получим или вярно, или невярно числово неравенство.

Например, ако в $3x - 1 > 4 - x$ заместим x с -1, ще имаме

$$3 . (-1) - 1 > 4 - (-1), \quad -4 > 5,$$

т.е. получаваме невярно числово неравенство.

Казваме, че $x = -1$ **не е решение** на неравенството с едно неизвестно.

Ако в същото неравенство заместим x с 2, ще получим

$$3 . 2 - 1 > 4 - 2, \quad 5 > 2,$$

което е вярно числово неравенство.

Казваме, че $x = 2$ е **решение на неравенството** с едно неизвестно.

Решение на неравенство с едно неизвестно наричаме такава стойност на променливата, за която от неравенството получаваме вярно числово неравенство.

Да решим дадено неравенство, означава да намерим всичките му решения или да установим, че то няма решения.

1 Намерете решенията на неравенството.

а) $t + 4 \leq t + 2$ б) $-x^2 - 1 < 0$

в) $2y > 0$ г) $\dfrac{x}{1,2} \leq 0$

Решение: а) Ако има стойност на t, за която $t + 4 \leq t + 2$ е вярно числово неравенство, то и неравенството $t + 4 - (t + 2) \leq 0$, т.е. $2 \leq 0$, също ще бъде вярно. Следователно неравенството няма решение.

б) Неравенството $-x^2 - 1 < 0$ е вярно за всяко x, тъй като $-x^2 \leq 0$ и $-1 < 0$. Следователно всяко x е решение на неравенството.

в) Решения на неравенството са всички положителни числа, тъй като произведението на положителното число 2 с y е положително точно когато $y > 0$.

г) Тъй като $1,2 > 0$, частното $\dfrac{x}{1,2}$ е неположително, когато $x \leq 0$, т.е. решенията на неравенството са $x \leq 0$.

При неравенствата са верни твърдения, подобни на теоремите за равносилност на уравнения:

Теорема 1 **(Теорема за заместване).** Ако израз в неравенство заместим с тъждествен на него израз, ще получим неравенство, равносилно на даденото.

Теорема 2 **(Теорема за прехвърляне).** Ако израз от едната страна на неравенство прехвърлим в другата му страна, но с противоположен знак, ще получим неравенство, равносилно на даденото.

Теорема 3 **(Теорема за умножение или деление с положително число).** Ако двете страни на неравенство умножим (разделим) с положително число, ще получим неравенство, равносилно на даденото.

Като следствие получаваме, че в неравенство може да унищожаваме противоположни изрази, намиращи се от една и съща страна на неравенството, или тъждествени изрази, намиращи се от двете страни на неравенството.

Теорема 3′ **(Теорема за умножение или деление с отрицателно число).** Ако двете страни на неравенство умножим (разделим) с отрицателно число и сменим посоката на неравенството, ще получим неравенство, равносилно на даденото.

2 Като отбележите използваната теорема, решете неравенството.

а) $6x - 5x < 3$ б) $x + 4,5 > 0,5$ в) $8x + 4 < 10$

г) $7x + 2 < 5x + 3$ д) $3x + 8x + 4 > 8x$ е) $6 - 4(x + 2) > x - 4x - 8$

Решение: г) $7x + 2 < 5x + 3 \Leftrightarrow$ (Т2) $7x - 5x < 3 - 2 \Leftrightarrow$ (Т1) $2x < 1 \mid : 2 > 0$ $\Leftrightarrow$ (Т3) $x < \dfrac{1}{2}$, така решенията са числата, по-малки от $\dfrac{1}{2}$.

3 Решете неравенството.
а) $6t - 5t < 8$ б) $2 - y \geq 5{,}3$
в) $7{,}3y - 10 > 6{,}3y + 1$ г) $5x - 6 + 2x \leq 6x + 4$

Неравенства от вида $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ и $ax + b \geq 0$, където a и b са константи, а x е променлива, наричаме **линейни неравенства с едно неизвестно**.

Тук неизвестното x е от първа степен, a е коефициентът пред неизвестното, а b е свободният член.

При $a \neq 0$ ще решим само неравенството $ax + b > 0$.
Имаме $ax + b > 0 \Leftrightarrow$ (Т2) $ax > -b$.

Ако $a > 0$, то $ax > -b \mid : a > 0 \Leftrightarrow$ (Т3) $x > -\frac{b}{a}$.

Ако $a < 0$, то $ax > -b \mid : a < 0 \Leftrightarrow$ (Т3′) $x < -\frac{b}{a}$.

Останалите неравенства решаваме аналогично.

4 Решете неравенството.
а) $11x - 2 < 0$, $2 - 3y > -4$, $3y - 1 \geq -1 + 6y$
б) $2x - (3x + 4) > 0$, $3(t - 1) + 5 \leq 0$, $-9 - \frac{1}{2}(2x - 4) \geq 0$
в) $5(x - 1) + 7 \leq 1 - 3(x + 2)$, $2(3 - z) - 3(2 + z) \geq z$

5 Решете неравенството.
а) $8x < 24$ б) $-2x \geq 1$ в) $\frac{x}{3} \leq 4$
г) $x : 4 > 5$ д) $7(t - 1) < 3t$ е) $6(x - 4) + 2(1 - x) > 0$

При $a = 0$ линейните неравенства имат вида $0x > b$, $0x < b$, $0x \geq b$ и $0x \leq b$.

6 Решете неравенството.
а) $0x > 13$, $0x > -11$, $0x > 0$
б) $0x \leq 7{,}2$, $0x \leq -9{,}1$, $0x \leq 0$

Решение: Понеже тъждеството $0x = 0$ е изпълнено за всяка стойност на x:

а) $0x > 13 \Leftrightarrow$ (Т1) $0 > 13$, което не е вярно, т.е. неравенството $0x > 13$ няма решение;

$0x > -11 \Leftrightarrow$ (Т1) $0 > -11$, което е вярно, т.е. всяко число е решение на неравенството $0x > -11$;

$0x < 0 \Leftrightarrow$ (Т1) $0 < 0$, което не е вярно, т.е. неравенството $0x > 0$ няма решения.

б) $0x \leq 7{,}2 \Leftrightarrow$ (Т1) $0 \leq 7{,}2$, което е вярно, т.е. всяко число е решение на неравенството $0x \leq 7{,}2$;

$0x \leq -9{,}1 \Leftrightarrow$ (Т1) $0 \leq -9{,}1$, което не е вярно, т.е. неравенството $0x \leq -9{,}1$ няма решения;

$0x \leq 0 \Leftrightarrow$ (Т1) $0 \leq 0$, което е вярно, т.е. всяко число е решение на неравенството $0x \leq 0$.

7 Решете неравенството.
а) $3x > 15$, $-4x < -16$, $2{,}5a > 0$
б) $7x - 1{,}4 < 0$, $2 - 3a \leq 1$
в) $3(x - 4) + 5 > 4(x - 1)$
г) $0{,}5x - 0{,}25(2x + 3) \geq x + 0{,}25$

8 Решете неравенството.
а) $0t < -4$ б) $0x \geq 0$
в) $6 - (x + 1) > 5 - x$ г) $3(x - 4) - 2(x + 2) \leq x - 1$

9 Решете неравенството.
а) $4x < 0$, $-4t > 0$, $2t - 2 > 2(t - 1)$
б) $6x \leq 3(2x + 1)$, $2(2t - 1) < 4(t - 5)$
в) $(x - 1)^2 - 2x < x^2$, $(3x + 1)(3x - 1) + 1 \geq 9x(x - 3)$

10 Монетите от 50 ст. на Ира са със 7 повече, отколкото монетите ѝ от 1 лв. Ако общата ѝ сума не е по-малка от 5 лв., най-малко колко монети от 50 ст. има Ира?

Решение: Нека Ира има x монети от 50 ст.

Тогава тя има $(x - 7)$ монети от 1 лв.

Така общата ѝ сума е $x \,.\, \frac{1}{2} + (x - 7) \,.\, 1 \geq 5 \Leftrightarrow x \,.\, \frac{3}{2} \geq 5 + 7 = 12 \Leftrightarrow x \geq 8$,

т.е. Ира има най-малко 8 монети от 50 ст.

ПРЕДСТАВЯНЕ НА РЕШЕНИЯТА НА ЛИНЕЙНО НЕРАВЕНСТВО С ИНТЕРВАЛ

1 Решете неравенството.

а) $2x - 1 > 0$ б) $2x - 1 \geq 0$ в) $5x - 2 < 0$ г) $5x - 2 \leq 0$

Решение: а) $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, т.е. решения на неравенството са числата, по-големи от $\frac{1}{2}$.

Записваме решенията и така: $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$. Четем: „**отворен интервал** от 2 до (плюс) безкрайност“.

б) $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1$, така решенията на неравенството са числата, по-големи или равни на $\frac{1}{2}$, т.е. числата от интервала $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ и числото $\frac{1}{2}$. Тези решения записваме така: $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$, и четем: „**полузатворен интервал** от $\frac{1}{2}$ до (плюс) безкрайност“.

в) $5x - 2 < 0 \Leftrightarrow 5x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$. Числата, по-малки от $\frac{2}{5}$, записваме така: $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)$, и четем: „**отворен интервал** от минус безкрайност до $\frac{2}{5}$“.

г) $5x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 5x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{5}$, така решенията на неравенството са числата, по-малки или равни на $\frac{2}{5}$, т.е. числата от интервала $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)$ и числото $\frac{2}{5}$. Записваме така: $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$, и четем: „**полузатворен интервал** от минус безкрайност до $\frac{2}{5}$“.

Множеството на всички числа отбелязваме с $(-\infty; \infty)$ и четем: **„интервал от минус безкрайност до (плюс) безкрайност“**.

Понеже числата, които познаваме, може да изобразяваме върху числова ос, то и интервалите също може да изобразяваме върху нея.

Дали едно число принадлежи на даден интервал, или не принадлежи, отбелязваме съответно със знаците $\in$ и $\notin$ (напр. $1 \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$, $1 \notin \left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$).

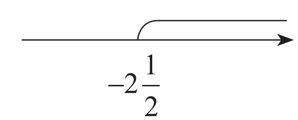
Изобразяването на интервал върху числова ос наричаме графично представяне на интервала. Лъчът, с който представяме интервала, за удобство означаваме с дъга или отсечка над числовата ос.

2 Решете неравенството и представете получените интервали графично.

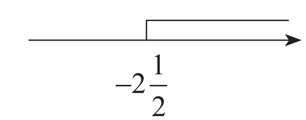
а) $2x + 5 > 0$ б) $2x + 5 \geq 0$ в) $2x + 5 < 0$ г) $2x + 5 \leq 0$

Решение: Решенията на съответните неравенства са:

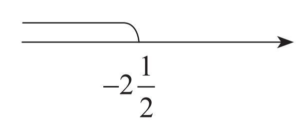
а) $x \in \left(-2\frac{1}{2}; \infty\right)$;



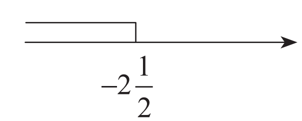
б) $x \in \left[-2\frac{1}{2}; \infty\right)$;



в) $x \in \left(-\infty; -2\frac{1}{2}\right)$;



г) $x \in \left(-\infty; -2\frac{1}{2}\right]$;



3 Запишете с неравенство и изобразете върху числова ос интервала.

а) $(-5; \infty)$ б) $(-\infty; 4,5)$ в) $[5; \infty)$
г) $[-4,2; \infty)$ д) $(-\infty; 6)$ е) $[0; \infty)$

4 Решете неравенството, запишете решението му с интервал и го изобразете върху числова ос.

а) $t - 5(5t + 2) \geq 0$ б) $6(x + 1) - 4(x + 2) < 1$
в) $2(y + 3) < 3(y + 2)$ г) $7,2 - (t + 0,2) \leq 4,3$

НЕРАВЕНСТВА, СВЕЖДАЩИ СЕ ДО ЛИНЕЙНИ

След еквивалентни преобразувания може да запишем някои неравенства от по-висока степен като линейни неравенства с едно неизвестно.

1 Решете неравенството.

а) $3x^2 - x(3x - 1) \geq x + 1$ б) $(2x + 1)^2 \leq 4x^2 + 2x$

в) $t(7 - t) > -(t - 7t + 7)$ г) $x^2 + 8 > (x - 4)^2$

2 За кои стойности на x изразът:

а) $2 - (x - 2)^2 + x^2$ е по-малък от 12;

б) $4x(x - 1) - (2x - 1)(2x + 1)$ е не по-голям от 3;

в) $\dfrac{1}{3}(3x + 6)(3x - 6)$ е по-голям от израза $3(x - 2)^2$;

г) $(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$ е не по-малък от израза $(1 - 2x)^3 + 6x(1 - 2x)$?

3 Намерете:

а) най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $2(x + 3)(x - 3) - 3 \geq 2(x + 1)^2$;

б) най-малкото цяло число, което е решение на неравенството $(2x - 1)^2 - 6 \leq 4(x + 1)(x - 1)$.

Решение: а) Решаваме неравенството:
$2(x + 3)(x - 3) - 3 \geq 2(x + 1)^2 \Leftrightarrow 2(x^2 - 9) - 3 \geq 2(x^2 + 2x + 1)$
$2x^2 - 18 - 3 \geq 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow -18 - 3 - 2 \geq 4x \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{23}{4} = -5\dfrac{3}{4}$. Така най-голямото цяло число, което се намира в интервала $\left(-\infty; -5\dfrac{3}{4}\right]$, е -6.

б) $(2x - 1)^2 - 6 \leq 4(x + 1)(x - 1) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 6 \leq 4(x^2 - 1)$
$\Leftrightarrow -4x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{4}$. Най-малкото цяло число в интервала $\left[-\dfrac{1}{4};\ \infty\right)$ е 0.

4 Намерете всички естествени числа, които са решения на неравенството.

а) $x(x - 1) - 3x \leq (x - 3)^2$ б) $(x - 0,5)^2 - x(x + 4) \geq -9,75$

в) $x - 2x > 0$ г) $3x \leq x$

Решение: а) $x(x - 1) - 3x \leq (x - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 3x \leq x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 2x \leq 9$, $x \leq 4,5$. Търсените числа са 1, 2, 3 и 4.

в) $x - 2x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, т.е. няма такива естествени числа.

5 Намерете сбора на всички цели:

а) отрицателни числа, за които $-3x - 25 < x$;

б) положителни числа, за които $x - 1 > 5x - 29$.

В някои текстови задачи също може в математическия модел да получим линейно неравенство.

6 Кучешки впряг се движи със скорост 24 km/h.

а) Най-много за колко време впрягът ще измине не повече от 7 km?

б) Най-малко за колко време впрягът ще измине не по-малко от 5 km?

Решение: Нека впрягът се движи x часа ($x > 0$). Тогава $S = 24x$ km.

а) $24x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{7}{24} = \dfrac{35}{120} = \dfrac{34}{120} + \dfrac{1}{120} = \dfrac{17}{60} + \dfrac{30}{3600}$ h, т.е. впрягът ще измине не повече от 7 km най-много за 17 min 30 s.

б) $24x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{24} = \dfrac{25}{120} = \dfrac{24}{120} + \dfrac{1}{120} = \dfrac{12}{60} + \dfrac{30}{3600}$ h, т.е. впрягът ще измине не по-малко от 5 km най-малко за 12 min 30 s.

7 Туристи се отправили с моторна лодка по течението на река и трябвало да се върнат на пристана за не повече от 3 h. На какво разстояние могат да се отдалечат туристите, ако скоростта на лодката в спокойна вода е 18 km/h, а скоростта на течението е 2 km/h?

Упътване. Ако търсеното разстояние е x км, имаме $\dfrac{x}{18+2} + \dfrac{x}{18-2} \leq 3$, или $x \leq \dfrac{80}{3} = 26\dfrac{2}{3}$ km.

8 Най-малко колко деца трябва да се включат в боядисването на яйца, ако яйцата са не по-малко от 110 и всяко дете боядисва:

а) по 10 яйца; б) по 6 яйца?

Решение: Нека участват x деца.

а) Боядисаните яйца са $10x \geq 110$, или $x \geq 11$, т.е. трябва да участват най-малко 11 деца.

б) Боядисаните яйца са $6x \geq 110$, или $x \geq \dfrac{110}{6} = 18\dfrac{1}{3}$, т.е. трябва да участват най-малко 19 деца.

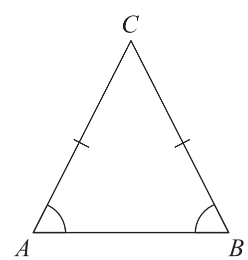
НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СТРАНИ И ЪГЛИ В ТРИЪГЪЛНИКА

До момента разглеждахме само неравенства между числа. Сега ще се запознаем и с някои неравенства между мерките на геометрични обекти – страни и ъгли в триъгълника.

Една отсечка е по-малка (по-голяма) от друга, ако дължината ѝ е по-малка (по-голяма) от тази на другата отсечка.

Един ъгъл е по-малък (по-голям) от друг, ако градусната му мярка е по-малка (по-голяма) от тази на другия ъгъл.

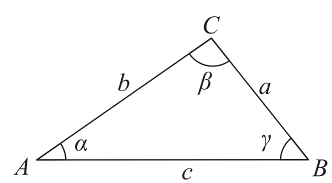
С помощта на признаците и свойствата на еднаквите триъгълници може да докажем, че:



Теорема 1. Един триъгълник е равнобедрен точно когато ъглите при основата му са равни, т.е. $AC = BC$ точно когато $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$, т.е. ъглите срещу равни страни в един триъгълник са равни и обратно.

Подобно твърдение имаме и в случая, когато триъгълникът не е равнобедрен, но вместо равенства на страните и ъглите в него имаме съответни неравенства:

***Теорема 2* (за сравняване на страни и ъгли в триъгълника).** В триъгълник ъгълът срещу по-голяма страна е по-голям и обратно, страната срещу по-голям ъгъл е по-голяма.



Имаме и следните следствия:

Следствие 1. Най-големият ъгъл в триъгълника е срещу най-голямата му страна, а най-малкият ъгъл – срещу най-малката му страна, и обратно – най-голямата страна в триъгълника е срещу най-големия му ъгъл, а най-малката му страна – срещу най-малкия ъгъл.

Когато двете неравенства $a \le b$ и $b \le c$ са изпълнени едновременно, използваме следния по-кратък запис: $a \le b \le c$.

Сега може да запишем твърдението на Теорема 2 така:

Теорема 2′. Нека в ΔABC имаме $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Неравенството $a \le b \le c$ е изпълнено точно тогава, когато е изпълнено и неравенството $\alpha \le \beta \le \gamma$.

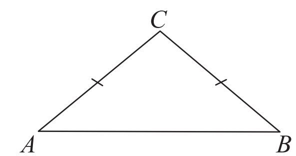
1 За страните на ΔABC е изпълнено $AC < AB < BC$. Възможно ли е за мерките на ъглите му да е изпълнено отношението:

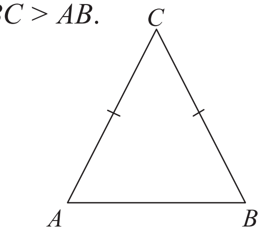
а) $\beta : \gamma : \alpha = 5 : 3 : 1$; б) $\beta : \gamma : \alpha = 1 : 3 : 5$?

Упътване. От Теорема 2′ следва, че $\beta < \gamma < \alpha$, т.е. само б) е възможно.

2 Определете вида на ъгъла при върха C на равнобедрения ΔABC ($AC = BC$), ако е изпълнено:

а) $BC < AB$; б) $BC > AB$.





Може ли да определим вида на този ъгъл във всеки от двата случая?

Решение: а) Имаме $\alpha = \beta < \gamma$, т.е. $180° = \alpha + \beta + \gamma < 3\gamma$, или $\gamma > 60°$, т.е. ъгълът при върха C може да бъде остър, прав или тъп.

б) Имаме $\alpha = \beta > \gamma$, т.е. $180° = \alpha + \beta + \gamma > 3\gamma$, т.е. $\gamma < 60°$ и е остър ъгъл.

3 За страните на ΔABC е изпълнено $AB > BC > AC$.

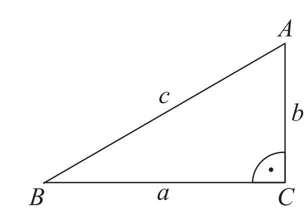
а) Един от ъглите на триъгълника е тъп. Кой е този ъгъл?

б) Един от ъглите на триъгълника е прав. Кой е този ъгъл?

Упътване. Използвайте $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ и $\gamma > \alpha > \beta$ (от Т2′) и покажете, че в триъгълника няма повече от един прав или тъп ъгъл, т.е. само γ може да е прав или тъп.

Понеже в правоъгълния триъгълник правият ъгъл е единствен и най-голям, в сила е следното:

Следствие 2. В правоъгълен триъгълник хипотенузата е по-голяма от всеки катет, т.е. $c > a$ и $c > b$.

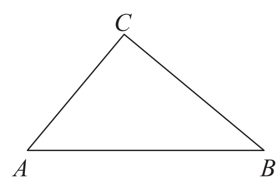


НЕРАВЕНСТВО НА ТРИЪГЪЛНИКА

Ще разгледаме някои връзки между дължините на страните на триъгълника, както и условия, при които три числа могат да бъдат дължини на страните на триъгълник.

Като следствие от теоремата за сравняване на страни и ъгли в триъгълника се получава следното свойство на всеки триъгълник:

Теорема 1 **(Неравенство на триъгълника).** В триъгълника всяка страна е по-малка от сбора на другите две, т.е. изпълнени са неравенствата:
$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b.$



Това е едно необходимо условие за съществуване на триъгълник, т.е. ако поне едно от тези три неравенства не е изпълнено, триъгълникът не съществува.

Вярно е и обратното твърдение, което може да използваме за установяване на съществуването на триъгълник:

Теорема 2 **(Признак за съществуване на триъгълник).** Триъгълник със страни a, b и c съществува, ако всяка от тях е по-малка от сбора на другите две.

Очевидно е достатъчно да проверяваме този признак само за най-голямата страна на триъгълника.

(1) Съществува ли триъгълник със страни:
а) 1 cm, 2 cm и 3 cm; б) 1 cm, 3 cm и 5 cm?

(2) Кои от следните тройки числа могат да бъдат страни на триъгълник?
а) 9, 40 и 41 б) 7, 7 и 3 в) 4, 5 и 1 г) 4, 6 и 3

Вярно е и твърдението, което следва от Теорема 1 и факта, че точката C е между A и B (е от отсечката AB) точно когато $AC + CB = AB$.

Следствие 1. Нека A, B и C са три точки. Тогава е вярно неравенството $AB \le AC + CB$, като равенство има точно когато C е между A и B.

(3) На една права ли са точките A, B и C, ако:
а) $AB = 6$ cm, $AC = 4{,}3$ cm и $CB = 2{,}8$ cm;
б) $BC = 10$ cm, $AB = 2$ cm и $AC = 8$ cm?

Решение: Ще сравним най-голямата страна със сбора на другите две.

а) $AC + CB = 7{,}1$ cm, $AB = 6$ cm, т.е. $AB < AC + BC$. Точките A, B и C образуват триъгълник, т.е. не са на една права.

б) $AB + AC = 2 + 8 = 10$ cm и $BC = 10$ cm, т.е. $BC = BA + AC$. Точките A, B и C не образуват триъгълник, т.е. те са на една права и точка A е между B и C.

Ако приемем, че за дължините на страните на триъгълник е изпълнено $a \le b \le c$, то от неравенството $c < a + b$ следва, че $c - a < b$ и $c - b < a$, а от неравенството $b < a + c$ следва, че $b - a < c$.

Така получихме следното следствие:

Следствие 2. В триъгълника всяка страна е по-малка от сбора на другите две и по-голяма от абсолютната стойност на тяхната разлика.

(4) Две от страните на триъгълник са 4 cm и 9 cm. Какви условия трябва да удовлетворява дължината на третата страна?

Решение: Нека дължината на третата страна е x cm. Тогава $x < 4 + 9 = 13$ и $x > 9 - 4 = 5$, т.е. $5 < x < 13$.

(5) Две от страните на триъгълник имат дължини 3 cm и 8 cm. Колко и кои цели стойности са възможни за дължината на третата страна?

(6) Намерете третата страна на равнобедрен триъгълник, ако две от страните му са:
а) 3 cm и 7 cm; б) 2 cm и 3 cm.

(7) Едната от страните на равнобедрен триъгълник е 7 cm. Обиколката му е:
а) 24 cm; б) 15 cm.

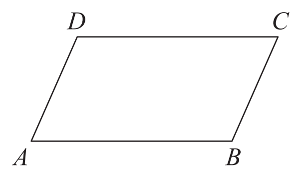
Намерете основата и бедрата на триъгълника, ако в условие б) триъгълникът е тъпоъгълен.

(8) Докажете, че всяка от трите медиани на триъгълник е по-малка от половината на обиколката му.

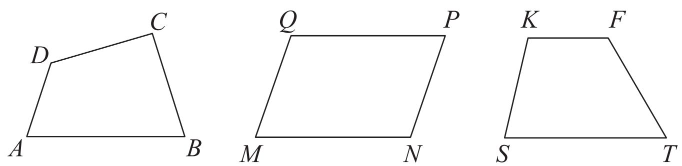
УСПОРЕДНИК. СВОЙСТВА НА СТРАНИТЕ И СВОЙСТВА НА ЪГЛИТЕ НА УСПОРЕДНИКА

Четириъгълник, на който срещуположните страни са успоредни, наричаме **успоредник**.

На чертежа $ABCD$ е успоредник, т.е. от определението следва, че $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.



(1) Кой от дадените четириъгълници е успоредник?

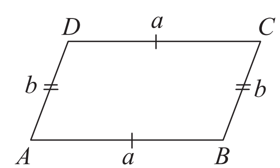


Страните на успоредник имат следното свойство: **Във всеки успоредник срещуположните страни са равни.**

На чертежа $AB = CD = a$ и $BC = AD = b$.

За обиколката P на успоредника $ABCD$ намираме

$P = 2a + 2b = 2(a + b)$.



(2) В успоредника $ABCD$ $AB = 8$ cm и $AD = 5$ cm. Намерете другите страни на успоредника.

(3) Една от страните на успоредник е с 6 cm по-голяма от другата. Намерете страните на успоредника, ако обиколката му е 40 cm.

Решение: Нека в успоредника $ABCD$ $a = b + 6$, т.е. $2 \,.\, (b + 6) + 2 \,.\, b = 40$, и $2 \,.\, b + 12 + 2 \,.\, b = 40$. Намираме $4 \,.\, b = 28$; $b = 28 : 4$; $b = 7$ cm. Тогава $a = 7 + 6 = 13$ cm.

(4) Една от страните на успоредник е два пъти по-голяма от другата. Намерете страните на успоредника, ако обиколката му е 48 cm.

(5) Дължините на страните на успоредник се отнасят както 4 : 3. Намерете страните на успоредника, ако обиколката му е 35 cm.

(6) Намерете сбора от градусните мерки на ъглите на четириъгълника $ABCD$.

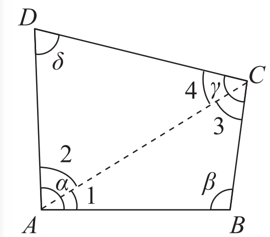
Решение: Диагоналът AC разделя $ABCD$ на два триъгълника.

В ΔABC $\sphericalangle 1 + \sphericalangle B + \sphericalangle 3 = 180°$. В ΔACD $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle D = 180°$.

Събираме почленно двете равенства:

$(\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2) + \sphericalangle B + (\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4) + \sphericalangle D = 360°$,

но $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle A$, $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle C$ и тогава $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$.



Сборът от градусните мерки на ъглите на четириъгълник е равен на 360°.

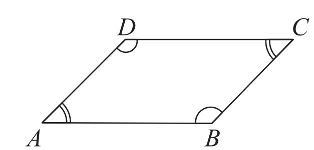
$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$$

(7) В четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 84°$ и $\sphericalangle C = 120°$. Намерете $\sphericalangle D$.

Срещуположни ъгли в четириъгълник – върховете им са срещуположни. Например $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle C$ или $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle D$. **Прилежащи ъгли** – върховете им са съседни. Например $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ или $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle D$ и т.н.

В успоредник срещуположните ъгли са равни.

На чертежа $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D$.



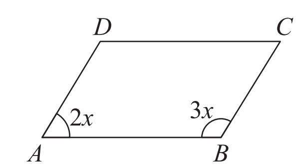
(8) Намерете ъглите на успоредник, ако два от тях се отнасят както 2 : 3.

Решение: От $(AD \parallel BC) \times AB$ следва, че $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ са прилежащи и $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$.

Нека $\sphericalangle A = 2 \,.\, x$ и $\sphericalangle B = 3 \,.\, x$. Получаваме

$2 \,.\, x + 3 \,.\, x = 180°$, т.е. $5 \,.\, x = 180°$, $x = 36°$.

Тогава $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 72°$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 108°$.

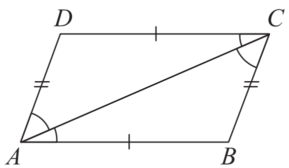


(9) В успоредника $ABCD$ диагоналът AC образува със страните AB и CB съответно ъгли 25° и 40°. Намерете ъглите на успоредника.

(10) Сборът на два ъгъла на успоредник е 140°. Намерете ъглите на успоредника.

ПРИЗНАЦИ ЗА УСПОРЕДНИК

Ще разгледаме признаци, с които ще установяваме кога даден четириъгълник е успоредник.



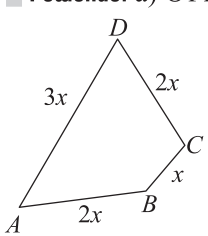
1 Нека $ABCD$ е четириъгълник, в който $AB = CD$ и $BC = AD$. Успоредник ли е $ABCD$?

Решение: За ΔABC и ΔCDA имаме: AC е обща страна, $AB = CD$ и $BC = AD$ – по условие. Тогава тези триъгълници са еднакви по трети признак. Тъй като $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, получаваме, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$. От равенството на кръстните ъгли $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle DCA$, получени при пресичане на AB и CD с правата AC, следва, че $AB \parallel CD$. Аналогично получаваме $BC \parallel AD$. Следователно по определение $ABCD$ е успоредник.

Така получихме следния признак за успоредник:

I. Ако срещуположните страни на четириъгълник са равни, той е успоредник.

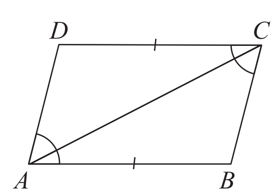
2 Успоредник ли е четириъгълникът $ABCD$, в който:
а) $AB : BC : CD : DA = 2 : 1 : 2 : 1$;
б) $AB : BC : CD : DA = 2 : 1 : 2 : 3$?



Решение: а) От $AB : BC : CD : DA = 2 : 1 : 2 : 1$ следва, че $AB = 2x$, $BC = x$, $CD = 2x$, $DA = x$. Получихме, че $AB = CD = 2x$ и $BC = DA = x$. Следователно $ABCD$ е успоредник.

б) От $AB : BC : CD : DA = 2 : 1 : 2 : 3$ следва, че $AB = 2x$, $BC = x$, $CD = 2x$ и $DA = 3x$. Получихме, че $AB = CD = 2x$, но $BC \neq AD$, при $x > 0$. Следователно $ABCD$ не е успоредник.

3 Нека в четириъгълника $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Успоредник ли е $ABCD$?



Решение: За ΔABC и ΔCDA имаме: AC е обща страна, $AB = CD$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ – кръстни ъгли, получени при пресичането на $AB \parallel CD$ с правата AC. Тогава $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ по първи признак. От еднаквостта на триъгълниците за съответните страни следва $BC = AD$. Следователно срещуположните страни на $ABCD$ са равни и $ABCD$ е успоредник.

Получихме друг признак за успоредник:

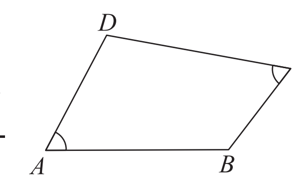
II. Ако две страни в четириъгълник са успоредни и равни, той е успоредник.

По подобен начин може да открием още два признака за успоредник:

III. Ако в четириъгълник срещуположните ъгли са равни, той е успоредник.

IV. Ако диагоналите на четириъгълник се разполовяват от пресечната си точка, той е успоредник.

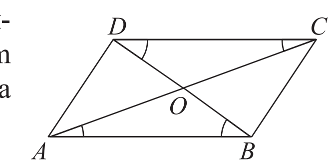
4 Успоредник ли е четириъгълникът $ABCD$, ако:
а) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 80°$ и $\sphericalangle B = 100°$;
б) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 80°$ и $\sphericalangle B = 115°$?



Решение: а) $\sphericalangle D = 360° - (2\,.\,80° + 100°) = 100°$
От $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 80°$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 100°$ следва, че $ABCD$ е успоредник.
б) $\sphericalangle D = 360° - (2\,.\,80° + 115°) = 85°$
От $\sphericalangle D \neq \sphericalangle B$ следва, че $ABCD$ не е успоредник.

5 Съществува ли успоредник, на който два от ъглите са:
а) 50° и 130°; б) 60° и 110°;
в) 45° и 45°; г) 120° и 120°?

6 Диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точка O. Ако $AO = 5{,}5$ cm и $BO = 3$ cm, $AC = 11$ cm и $BD = 6$ cm, каква фигура е $ABCD$?



Решение: $CO = AC - AO = 11 - 5{,}5 = 5{,}5$ cm.
Получихме $CO = AO = 5{,}5$ cm.
$DO = BD - BO = 6 - 3 = 3$ cm, т.е. $DO = BO$.
Следователно диагоналите на $ABCD$ се разполовяват от пресечната си точка и $ABCD$ е **успоредник**.

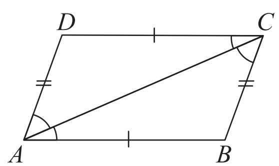
СВОЙСТВА НА УСПОРЕДНИКА

Страните на успоредника имат свойството:

I. Срещуположните му страни са успоредни и равни.

Ъглите на успоредника имат свойството:

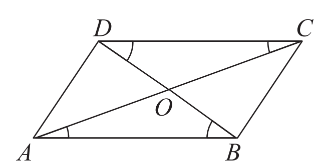
II. Срещуположните му ъгли са равни.



Ако $ABCD$ е успоредник, то
- $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$;
- $AB = CD$ и $BC = AD$;
- $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D$.

(1) Нека $ABCD$ е успоредник с диагонали AC и BD и $AC \times BD = O$. Равни ли са отсечките AO, OC, BO и OD?

Решение: За ΔABO и ΔCDO е изпълнено:

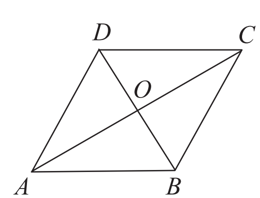


$AB = CD$ – срещуположни страни в успоредника, $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DCO$ – кръстни ъгли, получени при пресичането на $AB \parallel DC$ с AC, $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CDO$ – кръстни ъгли, получени при пресичането на $AB \parallel DC$ с BD. От това следва $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ по втори признак. Следователно $AO = CO$ и $BO = DO$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

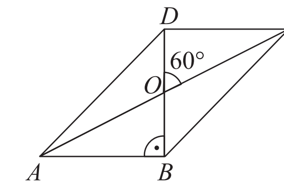
Така изведохме още едно свойство на успоредника:

III. В успоредника диагоналите се разполовяват от пресечната си точка.

(2) Диагоналите AC и BD на успоредника $ABCD$ се пресичат в точка O. Намерете AC и BD, ако $AO = 6$ cm и $BO = 4$ cm.



(3) В успоредника $ABCD$ диагоналът BD е перпендикулярен на страната AB. Намерете диагонала AC, ако ъгълът между диагоналите на успоредника е $60°$ ($\sphericalangle COD = 60°$) и $BD = 6$ cm.



(4) Една от страните на успоредник е 6 cm. Възможно ли е диагоналите му да имат дължини:

а) 8 cm и 6 cm; б) 7 cm и 5 cm; в) 6 cm и 4 cm?

Решение: Нека $ABCD$ е успоредник със страна $AB = 6$ cm. От свойството на успоредника знаем, че $AO = CO$ и $BO = DO$, където $AC \times BD = O$.

а) Ако $AC = 8$ cm и $BD = 6$ cm, то $AO = CO = 8 : 2 = 4$ cm; $BO = DO = 6 : 2 = 3$ cm.

Тъй като $AO + BO = 4 + 3 = 7 > 6 = AB$, то за AO, BO и AB е изпълнено условието за съществуване на ΔABO. Следователно е възможно диагоналите да имат тези дължини.

б) Тъй като $AO = CO = 7 : 2 = 3{,}5$ cm и $BO = DO = 5 : 2 = 2{,}5$ cm, то $AO + BO = 3{,}5 + 2{,}5 = 6 = AB$. Това означава, че точките A, O и B са на една права. Следователно не е възможно диагоналите да имат тези дължини.

(5) В успоредника $ABCD$ единият ъгъл е с $40°$ по-голям от другия. Какви са градусните мерки на ъглите му?

а) $65°$ и $105°$ б) $70°$ и $110°$ в) $80°$ и $120°$ г) $80°$ и $100°$

(6) Дължините на страните на успоредник се отнасят както $5 : 4$, а обиколката му е 36 cm. Какви са дължините на страните на успоредника?

а) 5 cm и 4 cm б) 10 cm и 8 cm
в) 15 cm и 12 cm г) 20 cm и 16 cm

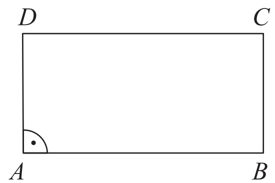
(7) Намерете ъглите на успоредник, ако два от тях се отнасят както $2 : 7$.

(8) Сборът на два ъгъла на успоредник е $170°$. Намерете ъглите на успоредника.

(9) В успоредника $ABCD$ е изпълнено $AC \times BD = O$, $DO = 5{,}5$ cm и $CO = 7$ cm. Намерете диагоналите AC и BD на успоредника.

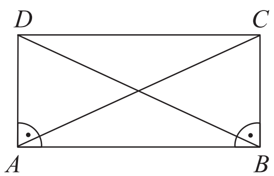
ПРАВОЪГЪЛНИК

1 В успоредника $ABCD$ $\sphericalangle A = 90°$. Намерете останалите ъгли на успоредника.



Решение: Срещуположните ъгли на успоредника $ABCD$ са равни, т.е. $\sphericalangle C = \sphericalangle A = 90°$. Сборът на прилежащите ъгли е 180°, т.е. $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, $90° + \sphericalangle B = 180°$, $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle D = \sphericalangle B = 90°$.

Успоредник с прав ъгъл наричаме правоъгълник.



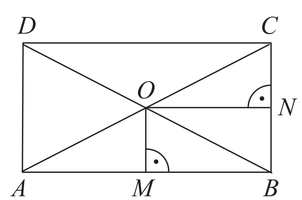
Правоъгълникът е успоредник и притежава всички свойства на успоредника.

Диагоналите на всеки правоъгълник са равни.

2 Вярно ли е, че ако в четириъгълник три от ъглите му са прави, той е правоъгълник?

Решение: Нека в четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$. От това, че $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, следва, че $AD \parallel BC$. Аналогично от $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ следва, че $AB \parallel CD$. Тогава четириъгълникът $ABCD$ е успоредник с прав ъгъл, следователно е **правоъгълник**.

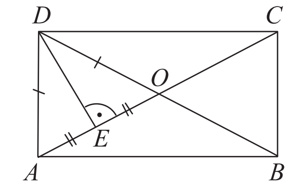
3 Диагоналите на правоъгълника $ABCD$ се пресичат в точка O. Намерете разстоянието от точка O до страните на правоъгълника, ако $AB = 9$ cm и $BC = 6$ cm.



Решение: От това, че $AC = BD$, $AO = OC$ и $BO = OD$, следва, че ΔABO и ΔBCO са равнобедрени. Височините OM и ON са съответно и медиани в равнобедрените триъгълници, т.е. $AM = MB$ и $BN = NC$. Четириъгълникът $MBNO$ има три прави ъгъла, следователно е правоъгълник. От правоъгълника $MBNO$ намираме $OM = NB = 3$ cm и $ON = MB = 4,5$ cm.

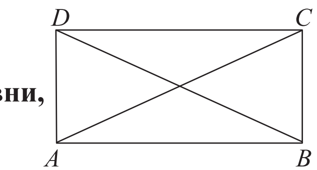
4 Диагоналите на правоъгълника $ABCD$ се пресичат в точка O. В ΔACD височината DE ($E \in AC$) разделя отсечката AO на две равни части. Намерете $\sphericalangle BAC$ и диагоналите на правоъгълника, ако $BC = 4$ cm.

Решение: От $DE \perp AO$ и $AE = EO$ следва, че ΔAOD е равнобедрен и $DA = DO$. Знаем, че и $AO = OD$, защото $AC = BD$ – свойство на диагоналите в правоъгълника. Тогава ΔAOD е равностранен, следователно $DA = DO = AO$, но $BC = DA = 4$ cm, т.е. $AC = BD = 8$ cm. Освен това $\sphericalangle BAC = 90° - 60° = 30°$.



В сила е следният признак за правоъгълник:

Ако диагоналите на успоредник са равни, той е правоъгълник.



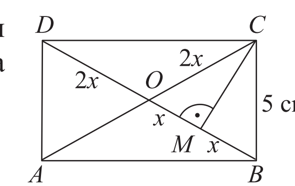
5 Под на стая, на който срещуположните ръбове са успоредни, трябва да има формата на правоъгълник. Как може да проверим правилността на формата на пода с помощта на въже?

6 Нека $ABCD$ е успоредник, за който $AC = 10$ cm. Ако $AC \times BD = O$ и $DO = 5$ cm, намерете $\sphericalangle BAD$.

7 Намерете обиколката на правоъгълника $ABCD$, ако разстоянията от пресечната точка O на диагоналите му до страните AB и BC са съответно 5 cm и 6,5 cm.

8 В правоъгълника $ABCD$ $CM \perp BD$ и $AD = 5$ cm. Ако $DM : MB = 3 : 1$, колко сантиметра е дължината на диагонала му?

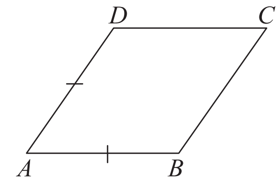
А) 12
Б) 20
В) 10
Г) 15



9 Ъгълът между диагоналите на правоъгълник е 70°. Намерете ъглите, които образуват страните на правоъгълника с диагоналите му.

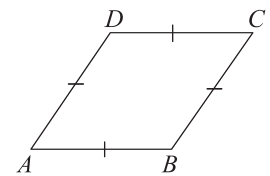
10 Диагоналите на правоъгълника $ABCD$ се пресичат в точка O. Намерете $\sphericalangle BAC$, ако ΔBCO е равностранен.

РОМБ



(1) В успоредника $ABCD$ $AB = AD = 6$ cm. Намерете останалите страни на успоредника.

Решение: Тъй като $ABCD$ е успоредник, то $BC = AD = 6$ cm и $CD = AB = 6$ cm.

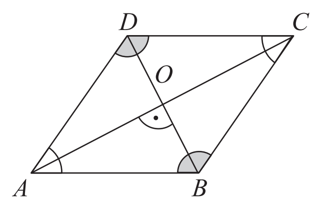


Успоредник с две равни съседни страни наричаме ромб.

Ромбът е успоредник и притежава всички негови свойства.

Ромбът има и следните свойства:

- Диагоналите на ромба са перпендикулярни.
- Диагоналите на ромба са ъглополовящи на ъглите му.
- Диагоналите в ромба го разделят на четири еднакви правоъгълни триъгълника.



(2) В ромба $ABCD$ диагоналът AC сключва ъгъл 35° със страна на ромба. Намерете ъглите на ромба.

Решение: Срещуположните ъгли на ромба $ABCD$ са равни и AC е ъглополовяща за $\sphericalangle BAD$.

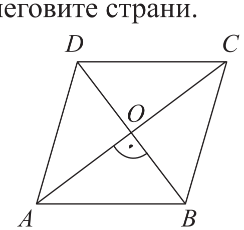
Следователно $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 2 \,.\, 35° = 70°$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 180° - 70° = 110°$.

(3) В ромб един от диагоналите му е равен на страната. Намерете:

а) ъглите на ромба;

б) ъглите, които диагоналите му образуват с неговите страни.

В сила са следните признаци за ромб:



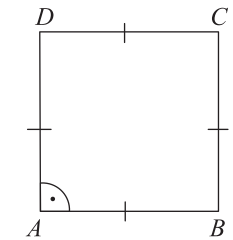
Ако диагоналите на успоредник са перпендикулярни, той е ромб.

Ако в четириъгълник страните са равни, той е ромб.

(4) Намерете обиколката на успоредника $ABCD$, в който диагоналите са перпендикулярни, $\sphericalangle ADB = 60°$ и $BD = 12$ cm.

(5) Страна на ромб образува с диагоналите му ъгли, които се отнасят както 1 : 5. Намерете ъглите на ромба.

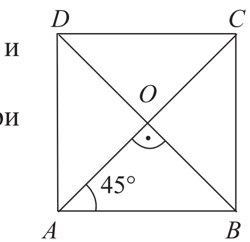
КВАДРАТ



Правоъгълник с равни страни наричаме квадрат.

Тъй като квадратът е и правоъгълник, и ромб, за него са верни свойствата на правоъгълника и ромба:

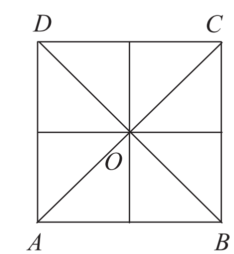
- Всички страни на квадрата са равни.
- Всички ъгли на квадрата са прави.
- Диагоналите на квадрата са равни и се разполовяват от пресечната си точка.
- Диагоналите на квадрата са перпендикулярни и са ъглополовящи на ъглите му.
- Диагоналите на квадрата го разделят на четири еднакви правоъгълни равнобедрени триъгълника.



В сила са следните признаци за квадрат:

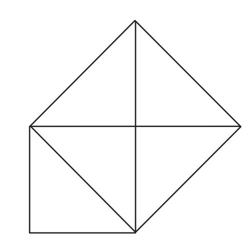
- Ако диагоналите на правоъгълник се пресичат под прав ъгъл, той е квадрат.
- Ако диагоналите на ромб са равни, той е квадрат.

Квадратът е правилен четириъгълник, защото страните му са равни и ъглите му са равни.



(1) Обиколката на квадрат е 24 cm. Намерете разстоянието от центъра на квадрата до страните му.

(2) Разстоянието от центъра на квадрат до една от страните му е 5 cm. Намерете обиколката на квадрата.



(3) Страната на квадрат е 4 cm, а диагоналът му е страна на друг квадрат. Намерете диагонала на втория квадрат.

(4) Кое от твърденията е вярно?

А) Всеки правоъгълник е квадрат.

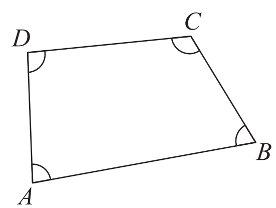
Б) Всеки ромб е квадрат.

В) Не всеки квадрат е правоъгълник.

Г) Не всеки ромб е квадрат.

УСПОРЕДНИК – ОБОБЩЕНИЕ

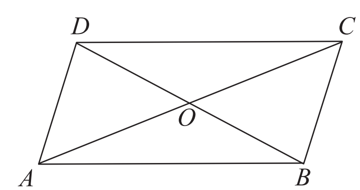
$ABCD$ – **четириъгълник**.
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$



Успоредник – четириъгълник с успоредни срещуположни страни.

Свойства

Ако $ABCD$ е успоредник, то:
- $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$;
- $AB = CD$ и $BC = AD$;
- $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D$;
  $AO = OC$ и $BO = OD$.



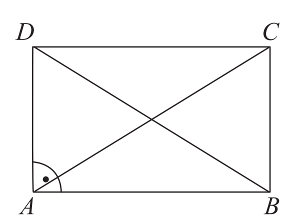
Признаци

Четириъгълникът $ABCD$ е успоредник, ако:
- $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ или
- $AB \parallel CD$ и $AB = CD$ ($AD \parallel BC$ и $AD = BC$), или
- $AB = CD$ и $BC = AD$, или
- $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, или
- $AO = OC$ и $BO = OD$.

Правоъгълник – успоредник с прав ъгъл.

Свойства

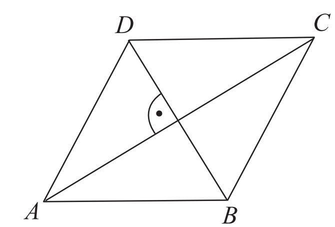
Ако $ABCD$ е правоъгълник, то:
- $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle B = \sphericalangle D = 90°$;
- $AC = BD$.



Признаци

Успоредникът $ABCD$ е правоъгълник, ако:
- $\sphericalangle A = 90°$ или
- $AC = BD$.

Ромб – успоредник с две равни съседни страни.



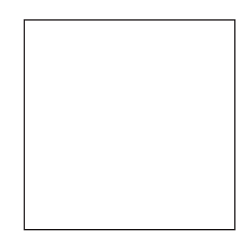
Свойства

Ако $ABCD$ е ромб, то:
- $AB = BC = CD = DA$;
- $AC \perp BD$;
- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$ и $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DCA$ и
  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$.

Признаци

Успоредникът $ABCD$ е ромб, ако:
- $AB = AD$ или
- $AC \perp BD$, или
- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$, или
- $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DCA$, или
- $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$, или
- $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$.

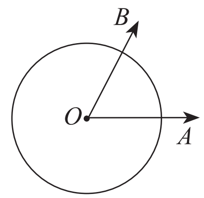
Квадрат – правоъгълник с две равни съседни страни (ромб с прав ъгъл).



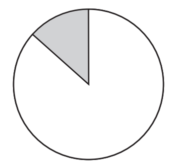
ПОСТРОЯВАНЕ И ИНТЕРПРЕТИРАНЕ НА КРЪГОВИ ДИАГРАМИ

От 6. клас знаем какво е централен ъгъл (**фиг. 1**) – това е ъгъл с връх центъра на окръжността, а рамената му я пресичат – $\sphericalangle AOB$.

Знаем и какво е сектор – оцветената част на **фиг. 2**.

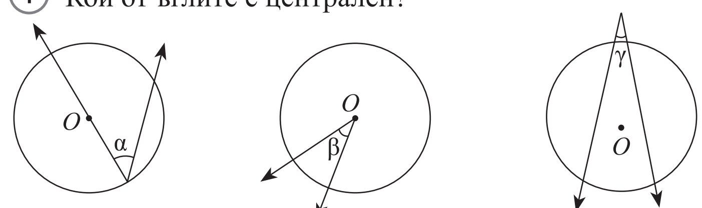


Фиг. 1



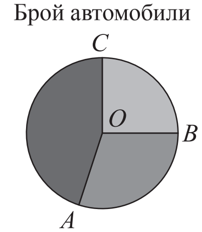
Фиг. 2

(1) Кой от ъглите е централен?



(2) В автосервиз за един ден са ремонтирани 40 автомобила. 18 от тях са с гориво бензин, 10 – с дизел, а останалите 12 – с газ. Тези данни са представени с кръгова диаграма. Определете на кой вид гориво съответстват секторите от кръга. На колко градуса са равни централните им ъгли?

Брой автомобили



Решение: Кръговата диаграма показва отношението на трите вида гориво. Най-малкият сектор – с централен ъгъл COB, отговаря на автомобилите с дизел, а най-големият – с централен ъгъл COA – на тези с бензин. За автомобилите с газ остава секторът с централен ъгъл AOB. Следователно трябва да разделим 360° на три централни ъгъла, които се отнасят както 18 : 10 : 12. Ако $\boldsymbol{x}$ са градусите, които съответстват на 1 автомобил, то $18\boldsymbol{x} + 10\boldsymbol{x} + 12\boldsymbol{x} = 360^\circ \Rightarrow 40\boldsymbol{x} = 360^\circ \Rightarrow \boldsymbol{x} = 360^\circ : 40 = 9^\circ \Rightarrow$
$\sphericalangle AOB = 12 \,.\, 9^\circ = 108^\circ$; $\sphericalangle COA = 18 \,.\, 9^\circ = 162^\circ$ и $\sphericalangle COB = 10 \,.\, 9^\circ = 90^\circ$.

Вид гориво	Брой автомобили	Градусна мярка
бензин	18	162°
дизел	10	90°
газ	12	108°
Общо	40	360°

Кръговата диаграма е кръг, разделен на сектори, мерките на централните ъгли на които са пропорционални на данните, които представят.

Централният ъгъл за всеки сектор от кръговата диаграма се получава по формулата $\alpha = \dfrac{k_i}{K} \,.\, 360^\circ$, където K е общото количество, а k_i е количеството на частта, която изобразяваме със съответния сектор, т.е. $\alpha = p\% \,.\, 360^\circ$.

(3) На тест по математика учениците от 7.[а] клас, които са 20, получили следните оценки: Слаб (2) – 1 ученик; Среден (3) – 5 ученици; Добър (4) – 7, Много добър (5) – 4, и Отличен (6) – 3. Намерете по колко процента от учениците са получили всяка от оценките, и представете данните с кръгова диаграма.

Решение: Учениците, получили Слаб (2), са $\dfrac{1}{20}$ част = 5%. Сега пресмятаме съответния централен ъгъл – за Слаб (2): 5% . 360° = 18°. С аналогични пресмятания намираме и за останалите оценки. Резултатите са в таблицата.

Вид оценка	Брой	Процент	Градусна мярка
2	1	5%	18°
3	5	25%	90°
4	7	35%	126°
5	4	20%	72°
6	3	15%	54°
Общо	20	100%	360°

Построяваме кръговата диаграма, като:
1. Построяваме окръжност k с център точка O и радиус например 5 cm;
2. Отмерваме с транспортир съответните централни ъгли и строим радиусите;
3. Оцветяваме или щриховаме получените сектори;
4. Надписваме секторите или правим легенда;
5. Записваме големината или процентните дялове.

Резултати от тест по математика

4 В един клас има 24 ученици. В таблицата е даден броят на учениците, занимаващи се с различни спортове. Постройте кръгова диаграма, като използвате данните от таблицата.

Плуване	Лека атлетика	Баскетбол	Волейбол	Тенис	Не спортуват
6	4	5	3	4	2

Задачи от вероятност на събития

От 6. клас знаем, че **вероятност** на едно **случайно събитие** A се нарича числото, равно на отношението на броя на благоприятните изходи (случаи, при които събитието настъпва) към броя на всички възможни изходи (случаи) и означаваме с:

$$P(A) = \frac{\textit{брой благоприятни изходи}}{\textit{брой на всички възможни изходи}}.$$

1 В една кутия има 4 бели, 5 черни, 6 червени и 3 сини топки. По случаен начин се изважда една топка.

а) Каква е вероятността извадената топка да е бяла?

б) Каква е вероятността извадената топка да е червена или синя?

в) Каква е вероятността, след като сме извадили бяла топка и не я върнем в кутията, да извадим отново бяла топка?

Решение: а) Нека събитието A е извадената топка да е бяла. Всички изходи са броят на всички топки, а той е $4 + 5 + 6 + 3 = 18$. Благоприятните изходи са броят на белите топки, т.е. 4. Вероятността извадената топка да е бяла, е $P(A) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

б) Нека събитието B е извадената топка да е червена или синя. Всички изходи са 18, а благоприятните изходи са броят на червените плюс сините топки, т.е. $6 + 3 = 9$. Вероятността извадената топка да е червена или синя, е $P(B) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

в) След като вече е извадена една бяла топка, то благоприятните изходи ще намалеят с един и ще са 3, а също и всички изходи и те ще са 17. Нека събитието C е извадената топка да е бяла. Тогава $P(C) = \frac{3}{17}$.

2 Да се намери каква е вероятността при изтегляне на карта от една колода от 52 карти да се изтегли:

а) седмица;

б) асо купа;

в) асо или седмица.

Решение: а) Нека събитието A е изтеглената карта да е седмица. В една колода имаме четири седмици, т.е. благоприятните изходи са 4, а всички са 52, следователно $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

б) Нека събитието B е изтеглената карта да е асо купа. Имаме само един благоприятен изход – асо купа, следователно $P(B) = \frac{1}{52}$.

в) Нека събитието C е изтеглената карта да е асо или седмица. В една колода имаме четири седмици и четири аса, т.е. благоприятните изходи са $4 + 4 = 8$, следователно $P(C) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$.

3 От една колода от 52 карти изтегляме 1 карта. Каква е вероятността тя да е пика?

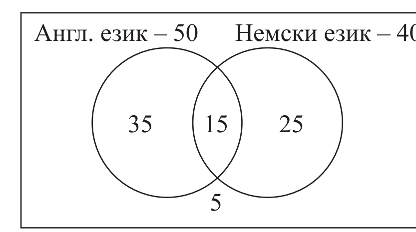
4 В хотел са настанени 80 туристи. 50 от тях говорят английски език, 40 говорят немски език, а 5 не говорят нито един от тези два езика. Каква е вероятността случайно избран турист от тази група да говори:

а) и двата езика;

б) само английски език;

в) само немски език;

г) поне един от двата езика?



Решение: Тъй като от групата туристи 5 не говорят нито английски, нито немски език, то поне един от тези езици говорят $80 - 5 = 75$ туристи. Но английски и немски говорят общо $50 + 40 = 90$ туристи, т.е. $90 - 75 = 15$ туристи говорят и двата езика. Пресмятанията дотук може да бъдат описани много удобно с помощта на диаграми на Вен. Вероятността случайно избран турист от тази група да говори:

а) и двата езика, е $P = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$;

б) само английски език, е $P = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$;

в) само немски език, е $P = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}$;

г) поне един от двата езика, е $P = \frac{75}{80} = \frac{15}{16}$.

5 Ако правилен зар е хвърлен 120 пъти, то колко пъти се очаква да се падне:

а) 2;

б) число, което се дели на 2;

в) число, което е делител на числото 6?

Решение: а) Вероятността да се падне 2, е $P=\frac{1}{6}$. Ако броят на благоприятните изходи при 120 опита е x, то $\frac{x}{120}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow x=20$, т.е. броят на благоприятните опити се очаква да е 20.

б) Вероятността да се падне число, което се дели на 2, е $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Ако броят на благоприятните изходи при 120 опита е $\boldsymbol{y}$, то $\frac{y}{120}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $y=60$, т.е. броят на благоприятните опити се очаква да е 60.

в) Делители на числото 6 са 1, 2, 3 и 6, т.е. благоприятните изходи са 4. Вероятността да се падне число, което е делител на числото 6, е $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Ако броят на благоприятните изходи при 120 опита е $\boldsymbol{t}$, то $\frac{t}{120}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow t=80$, т.е. броят на благоприятните опити се очаква да е 80.

6 В урна има бели и черни топки, различаващи се само по цвета. Броят на белите топки е 24, а вероятността при случаен опит да се изтегли черна топка, е $\frac{3}{5}$. Ако в урната няма други топки освен белите и черните, определете:

а) вероятността от урната да се изтегли бяла топка;

б) броя на топките в урната;

в) броя на черните топки.

Решение: а) Тъй като в урната няма други топки освен белите и черните, а вероятността при случаен опит да се изтегли черна топка, е $\frac{3}{5}$, то вероятността при случаен опит да се изтегли бяла топка, е $1-\frac{3}{5}=\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

б) Броят на белите топки е 24, а това са благоприятните изходи за събитието „Изтеглена е бяла топка“. Ако означим с x броя на всички топки в урната, тогава $\frac{24}{x}=\frac{2}{5}$, т.е. топките в урната са 60.

в) Броят на черните топки е $60-24=36$.

7 Намерете каква е вероятността при едновременно хвърляне на два еднакви зара сборът от точките върху двата зара да е:

а) 7;

б) по-малък от 7.

Решение: Всяка стена от единия зар се съчетава с всяка от шестте стени на другия зар и това са всичките $6 \,.\, 6=36$ възможни изхода, а именно (всяка цифра означава стена, имаща съответно толкова точки):
11; 12; 13; 14; 15; 16; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 31; 32; 33; 34; 35; 36;
41; 42; 43; 44; 45; 46; 51; 52; 53; 54; 55; 56; 61; 62; 63; 64; 65; 66.

а) Благоприятните изходи са 16; 25; 34; 43; 52; 61, т.е. 6. Тогава вероятността при едновременно хвърляне на двата зара сборът от точките върху тях да е 7, е $P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

б) Сборът от точките върху двата зара да е по-малък от 7, означава, че благоприятните изходи са 11; 12; 13; 14; 15; 21; 22; 23; 24; 31; 32; 33; 41; 42; 51, т.е. 15. Тогава вероятността е $P=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

8 Хвърлени са два еднакви, но различно оцветени (бял и черен) зара. Определете каква е вероятността броят на точките върху белия зар да е два пъти по-голям от броя на точките върху черния зар.

Тест № 1А (Входящ тест)

Име: ……

ЗАДАЧА 1. Посочете вярното твърдение.

А) Модулът на всяко рационално число е положително число или нула.
Б) Модулът на всяко рационално число е противоположното му число.
В) Модулът на всяко рационално число е самото число.
Г) Модулът на всяко рационално число е отрицателно число.

ЗАДАЧА 2. Колко е сборът на целите числа, които са по-големи от –23 и по-малки от 21?

А) –69 **Б)** –43 **В)** –2 **Г)** 20

ЗАДАЧА 3. Коя е стойността на израза $5^2 - 5 \,.\, 3$?

А) –10 **Б)** –5 **В)** 5 **Г)** 10

ЗАДАЧА 4. На колко е равна степента $2^{(-3)^2}$?

А) 2^{-9} **Б)** 2^{-6} **В)** 2^{6} **Г)** 2^{9}

ЗАДАЧА 5. Колко квадратни сантиметра са лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на правилна четириъгълна призма с основен ръб 7 cm и височина 1,6 dm?

……

ЗАДАЧА 6. Кое е неизвестното число в уравнението $7{,}6 + (-5{,}2) = x \,.\, (-2{,}4)$?

……

ЗАДАЧА 7. Коя е стойността на израза $(3 \,.\, x^2 \,.\, y)^3 : (81 \,.\, x^4 \,.\, y^{10})$, за $x = 2$ и $y = \dfrac{1}{3}$?

……

ЗАДАЧА 8. Колко килограма тежи железен лост с диаметър 52 mm и дължина 2,5 m, ако 1 cm^3 от него тежи 7,8 g?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 8:

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Тест № 1Б (Входящ тест)

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Кое е вярно?

А) Противоположните числа се различават по модул.
Б) Противоположните числа се различават само по знак.
В) Противоположните числа не се различават.
Г) Противоположните числа се различават по модул и по знак.

ЗАДАЧА 2. Колко е сборът на целите числа, които са по-големи от –18 и по-малки от 16?

А) –41 **Б)** –33 **В)** –2 **Г)** 0

ЗАДАЧА 3. Коя е стойността на израза $3^3 - 5 \,.\, 3$?

А) –6 **Б)** 6 **В)** 12 **Г)** 14

ЗАДАЧА 4. На колко е равна степента $3^{(-5)2}$?

А) 3^{-10} **Б)** 3^{-7} **В)** 3^{10} **Г)** 3^{25}

ЗАДАЧА 5. Колко квадратни дециметра са лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на правилна четириъгълна пирамида с апотема 8,5 dm и основен ръб 42 cm?

....

ЗАДАЧА 6. Намерете неизвестното число $x \,.\, 0{,}8 = (1 - 1{,}8) \,.\, (-5)$. ....

ЗАДАЧА 7. Коя е стойността на израза $(3 \,.\, x \,.\, y^2)^3 : (81 \,.\, x^{10} \,.\, y^4)$, за $x = \dfrac{1}{3}$ и $y = 2$?

....

ЗАДАЧА 8. Колко килограма тежи железен лост с диаметър 50 mm и дължина 3,5 m, ако 1 cm^3 от него тежи 7,8 g?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 8:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 2А

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Какво ще получим след опростяване на израза $x(x-2)-(x-2)^2$?

А) $-6x-4$ **Б)** $2x^2-6x-4$ **В)** $2x+4$ **Г)** $2x-4$

ЗАДАЧА 2. Кой от изразите е тъждествено равен на израза x^2-3x-1?

А) $x(x-2)+x-1$ **Б)** $(x+1)(x-1)+3x$ **В)** $(x-1)^2-(x+2)$ **Г)** $(1-x).(1+x)-2x+1$

ЗАДАЧА 3. В разлагането на кой израз не участва изразът $x+1$?

А) x^2-1 **б)** x^4-1 **В)** x^3+1 **Г)** x^2-2x+1

ЗАДАЧА 4. Какво се получава след разлагане на многочлена $x^2+4x+4-y^2$ на множители?

А) $(x+y)(x-y)+4(x+1)$ **Б)** $x(x+4)+(2-y)(2+y)$

В) $(x+2-y)(x+2+y)$ **Г)** $(x+2)^2-y^2$

ЗАДАЧА 5. Кое е разлагането на многочлена $2x^2+8x^2y^2+8x^3y$ на множители?

....

ЗАДАЧА 6. Опростете израза $(x-2)^3-(x-2)(x^2+2x+4)+3x(2x-4)$.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 2Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Какво ще получим след опростяване на израза $x(x + 1) - (x - 3)^2$?
А) $-5x + 9$ **Б)** $2x^2 - 5x + 9$ **В)** $7x + 9$ **Г)** $7x - 9$

ЗАДАЧА 2. Кой от изразите е тъждествено равен на израза $x^2 - 3x - 2$?
А) $x(x - 4) + x - 3$ **Б)** $(x + 1)(x - 1) + 3x$ **В)** $(x - 1)^2 - (x + 3)$ **Г)** $(1 - x)(1 + x) - 3x + 1$

ЗАДАЧА 3. В разлагането на кой израз не участва изразът $x - 2$?
А) $x^2 - 4$ **Б)** $x^4 - 16$ **В)** $x^3 - 8$ **Г)** $x^2 - 2x + 1$

ЗАДАЧА 4. Какво се получава след разлагане на многочлена $x^2 + 6x + 9 - y^2$ на множители?
А) $(x + 3 - y)(x + 3 + y)$ **Б)** $x(x + 6) + (3 - y)(3 + y)$
В) $(x + y)(x - y) + 3(2x + 3)$ **Г)** $(x + 3)^2 - y^2$

ЗАДАЧА 5. Кое е разлагането на множители на многочлена $8x^2 + 2x^2y^2 + 8x^3y$?

....

ЗАДАЧА 6. Опростете израза $(2x - 3)^3 - (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) + 18x(2x - 3)$.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 3А

Име: ………

ЗАДАЧА 1. На кое уравнение е решение числото 0,5?

А) $2x - 3 = -2$ **Б)** $x^2 = 2{,}5$ **В)** $1 - x = 1{,}5$ **Г)** $6x = 3(x - 0{,}5)$

ЗАДАЧА 2. Кое е решението на уравнението $(5 - x)(5 + x) = x(3 - x) + 4$?

А) -19 **Б)** -7 **В)** 7 **Г)** 19

ЗАДАЧА 3. Кои са решенията на уравнението $x^2 - 6x + 9 = 3 - x$?

А) 3 **Б)** 2 **В)** 3 и 2 **Г)** 3 и 4

ЗАДАЧА 4. Фирма внася 120 000 лв. на едноседмичен срочен влог при 0,8% лихва. Колко лева е нарасналият капитал в края на седмицата?

………

ЗАДАЧА 5. От два града, разстоянието между които е 102 km, тръгват едновременно един срещу друг двама мотоциклетисти. Единият се движи със скорост 50 km/h, а другият – с 45 km/h. След колко часа ще се срещнат?

………

ЗАДАЧА 6. С един багер може да се изкопае канал за 28 дни, а с друг – за $\frac{5}{7}$ от това време. За колко дни двата багера ще изкопаят 60% от канала?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Тест № 3Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. На кое уравнение е решение числото 0,6?

А) $1 - x = 1{,}6$ **Б)** $x^2 = 3{,}6$ **В)** $2x - 1 = 0{,}2$ **Г)** $6x = 3(x - 0{,}6)$

ЗАДАЧА 2. Кое е решението на уравнението $(4 - x)(4 + x) = x(6 - x) + 4$?

А) –6 **Б)** –2 **В)** 2 **Г)** 6

ЗАДАЧА 3. Кои са решенията на уравнението $x^2 - 4x + 4 = 2 - x$?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 2 и 3 **Г)** 1 и 2

ЗАДАЧА 4. Фирма внася 160 000 лв. на едноседмичен срочен влог при 0,5% лихва. Колко лева е нарасналият капитал в края на седмицата?

....

ЗАДАЧА 5. От два града, разстоянието между които е 340 km, тръгват едновременно един срещу друг два автомобила. Единият се движи със скорост 80 km/h, а другият – с 90 km/h. След колко часа ще се срещнат?

....

ЗАДАЧА 6. С един багер може да се изкопае канал за 30 дни, а с друг – за $\frac{2}{3}$ от това време. За колко дни двата багера ще изкопаят 50% от канала?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 4А

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Дадени са три различни точки. Колко прави минават през две от тях?

А) 2 **Б)** 1 или 3 **В)** 3 **Г)** 2 или 3

ЗАДАЧА 2. Какъв е видът на съседния ъгъл на остър ъгъл?

А) остър ъгъл **Б)** прав ъгъл **В)** тъп ъгъл **Г)** Не може да се определи.

ЗАДАЧА 3. Един от ъглите, получени при пресичане на две прави, е с $26°$ по-малък от другия. Колко градуса е по-малкият ъгъл?

А) $77°$ **Б)** $78°$ **В)** $102°$ **Г)** $103°$

ЗАДАЧА 4. Един от ъглите на триъгълник е $40°$. Мерките на другите два ъгъла се отнасят както $3 : 4$. Колко градуса е най-големият ъгъл на триъгълника?

А) $20°$ **Б)** $60°$ **В)** $80°$ **Г)** $140°$

ЗАДАЧА 5. Една от страните на триъгълник е 3 пъти по-дълга от друга. Третата страна е с 5 cm по-дълга от втората. Обиколката е 47 cm. Колко сантиметра са страните на триъгълника? Определете вида на триъгълника според страните му.

....

ЗАДАЧА 6. Намерете ъглите α, β и γ на триъгълник, ако градусните им мерки се отнасят както $2 : 3 : 7$. Определете вида на триъгълника според ъглите му.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 4Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Дадени са три прави, всеки две от които се пресичат. Колко лъча се образуват при пресичането им?

А) 3 **Б)** 6 **В)** 12 **Г)** Не може да се определи.

ЗАДАЧА 2. Какъв е съседният ъгъл на прав ъгъл?

А) остър ъгъл **Б)** прав ъгъл **В)** тъп ъгъл **Г)** Не може да се определи.

ЗАДАЧА 3. Един от ъглите, получени при пресичане на две прави, е с $34°$ по-малък от другия. Колко градуса е по-малкият ъгъл?

А) $73°$ **Б)** $74°$ **В)** $106°$ **Г)** $107°$

ЗАДАЧА 4. Един от ъглите на триъгълник е $45°$. Мерките на другите два ъгъла се отнасят както $3 : 2$. Колко градуса е най-големият ъгъл на триъгълника?

А) $27°$ **Б)** $54°$ **В)** $81°$ **Г)** $135°$

ЗАДАЧА 5. Една от страните на триъгълник е 2 пъти по-дълга от друга. Третата страна е с 4 cm по-дълга от втората. Обиколката му е 54 cm. Колко сантиметра са страните на триъгълника? Определете вида на триъгълника според страните му.

....

ЗАДАЧА 6. Намерете ъглите α, β и γ на триъгълник, ако градусните им мерки се отнасят както $4 : 3 : 8$. Определете вида на триъгълника според ъглите му.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 6:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

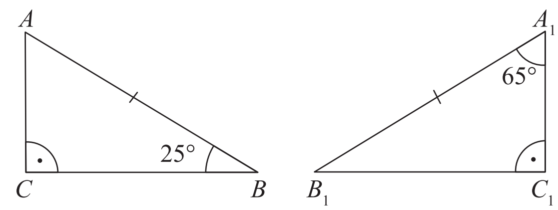
....

Тест № 5А

Име: ....

ЗАДАЧА 1. По кой признак са еднакви ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$?

А) първи признак
Б) втори признак
В) трети признак
Г) специален признак за еднаквост на правоъгълни триъгълници

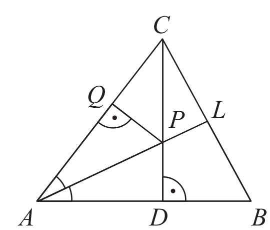


ЗАДАЧА 2. Един от външните ъгли на равнобедрен триъгълник е 130°. Колко градуса е вътрешният ъгъл при върха му?

А) 50° **Б)** 80° **В)** 50° или 80° **Г)** Не може да се определи.

ЗАДАЧА 3. В ΔABC AL е ъглополовяща, а CD е височина. Кое е винаги вярно?

А) $PD = CL$ **Б)** $PD = PC$
В) $PD = PQ$ **Г)** никое от предишните



ЗАДАЧА 4. В правоъгълния $\Delta ABC(\sphericalangle C = 90°)$ и $AB = 2BC$. Колко градуса е $\sphericalangle A$?

А) 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** Не може да се определи.

ЗАДАЧА 5. Даден е правоъгълен ΔABC, за който $\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ и AL е ъглополовяща на $\sphericalangle A$. Ако $CL = 3$ cm, колко сантиметра е дължината на BC?

....

ЗАДАЧА 6. Симетралата на страната AB на ΔABC пресича страната AC в точка M. Колко сантиметра е $P_{\Delta MBC}$, ако $BC = 9$ cm и $AC = 13$ cm?

....

ЗАДАЧА 7. Обиколката на правоъгълен ΔABC $(\sphericalangle C = 90°)$ е 60 cm, катетът $AC = 24$ cm, а $AB = 26$ cm. Намерете $P_{\Delta BCM}$, ако M е средата на AB.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 7:

....

....

....

....

....

....

....

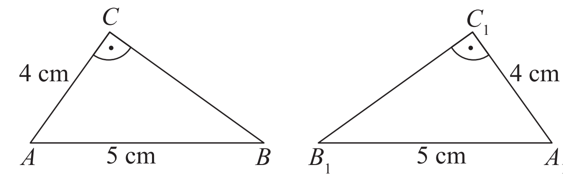
....

Тест № 5Б

Име: ....

ЗАДАЧА 1. По кой признак са еднакви ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$?

А) първи признак
Б) втори признак
В) трети признак
Г) специален признак за еднаквост на правоъгълни триъгълници

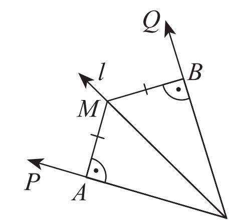


ЗАДАЧА 2. Един от външните ъгли на равнобедрен триъгълник е 140°. Колко градуса е вътрешният ъгъл при върха му?

А) 40° **Б)** 100° **В)** 40° или 100° **Г)** Не може да се определи.

ЗАДАЧА 3. Точката M е от ъглополовящата $\overrightarrow{l}$ на $\sphericalangle POQ = 60°$ и $OM = 16$ cm. По колко сантиметра са разстоянията MA и MB от точка M до $\overrightarrow{OP}$ и до $\overrightarrow{OQ}$?

А) 4 cm **Б)** 8 cm **В)** 16 cm **Г)** друг отговор



ЗАДАЧА 4. В правоъгълния ΔABC $(\sphericalangle C = 90°)$ $AB = 2AC$. Колко градуса е $\sphericalangle A$?

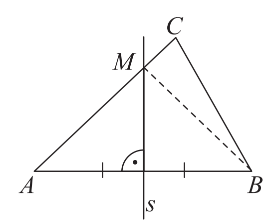
А) 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** Не може да се определи.

ЗАДАЧА 5. Даден е правоъгълен ΔABC, за който $\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ и AL е ъглополовяща на $\sphericalangle A$. Ако $BL = 6$ cm, колко сантиметра е дължината на BC?

....

ЗАДАЧА 6. Симетралата на страната AB на ΔABC пресича страната AC в точка M. Колко сантиметра е $P_{\Delta MBC}$, ако $BC = 7$ cm и $AC = 11$ cm?

....



ЗАДАЧА 7. Обиколката на правоъгълен ΔABC $(\sphericalangle C = 90°)$ е 60 cm, катетът $AC = 20$ cm, а $AB = 25$ cm. Намерете $P_{\Delta BCM}$, ако M е средата на AB.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 7:

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 6А

Име: ....

ЗАДАЧА 1. На кое неравенство е решение интервалът $(-\infty; 3]$?

А) $-x \le -3$ **Б)** $-x \le -3$ **В)** $-x > -3$ **Г)** $x > 3$

ЗАДАЧА 2. Кое е най-малкото цяло решение на неравенството $3x < 2x - 5$?

А) -6 **Б)** -5 **В)** 5 **Г)** 6

ЗАДАЧА 3. Колко естествени числа са решения на неравенството $x + 5 \ge 2x - 1$?

А) 6 **Б)** 5 **В)** 0 **Г)** 7

ЗАДАЧА 4. При кое от дадените условия четириъгълникът $ABCD$ НЕ е успоредник?

А) $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ **Б)** $AB \parallel CD$ и $AB = CD$

В) $AB \parallel CD$ и $BC = AD$ **Г)** $AB = CD$ и $BC = AD$

ЗАДАЧА 5. Две от страните на равнобедрен триъгълник са 3 cm и 7 cm. Колко сантиметра е третата страна на триъгълника?

....

ЗАДАЧА 6. В правоъгълника $ABCD$ е изпълнено $CM \perp BD$ и $AD = 5$ cm. Ако $DM : MB = 3 : 1$, колко сантиметра е дължината на диагонала?

....

ЗАДАЧА 7. Обиколката на равнобедрен триъгълник е 15 cm. Едната от страните му е 7 cm. Намерете основата и бедрата на триъгълника, ако триъгълникът е тъпоъгълен.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 7:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 6Б

Име: ……

ЗАДАЧА 1. На кое неравенство е решение интервалът $(-\infty; -2]$?

А) $-x \le -2$ **Б)** $-x \le 2$ **В)** $-x > -2$ **Г)** $x > 2$

ЗАДАЧА 2. Кое е най-малкото цяло решение на неравенството $2x < 3x - 5$?

А) –6 **Б)** –5 **В)** 5 **Г)** 6

ЗАДАЧА 3. Колко естествени числа са решения на неравенството $x + 5 \ge 2x - 1$?

А) 6 **Б)** 5 **В)** 0 **Г)** 7

ЗАДАЧА 4. Кое е вярно?

А) Всеки правоъгълник е квадрат.
Б) Всеки ромб е квадрат.
В) Не всеки квадрат е правоъгълник.
Г) Не всеки ромб е квадрат.

ЗАДАЧА 5. Две от страните на триъгълник имат дължини 3 cm и 8 cm. Колко и кои цели стойности са възможни за дължината на третата страна, ако я измерваме в сантиметри?

……

ЗАДАЧА 6. Обиколката на равнобедрен триъгълник е 26 cm. Едната от страните му е 8 cm. Намерете основата и бедрата на триъгълника, ако триъгълникът е тъпоъгълен.

……

ЗАДАЧА 7. В успоредника $ABCD$ диагоналът AC образува съответно със страните AB и CB ъгли 25° и 40°. Намерете ъглите на успоредника.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 7:

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Тест № 7А (Изходящ тест)

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Какво ще получим след опростяване на израза $(x + 1)(1 - x) + (x - 3)^2$?
А) $-6x + 10$ **Б)** $2x^2 - 6x + 8$ **В)** $-6x - 8$ **Г)** друг отговор

ЗАДАЧА 2. Какво ще получим след разлагане на многочлена $x^2 + 4x + 4 - y^2$?
А) $(x + y)(x - y) + 4(x + 1)$ **Б)** $x(x + 4) + (2 - y)(2 + y)$
В) $(x + 2 - y)(x + 2 + y)$ **Г)** $(x + 2)^2 - y^2$

ЗАДАЧА 3. Кое е решението на уравнението $(4 - x)(4 + x) = x(6 - x) + 4$?
А) -6 **Б)** -2 **В)** 2 **Г)** 6

ЗАДАЧА 4. Кое от твърденията НЕ е вярно?
А) В произволен триъгълник има най-много един тъп ъгъл.
Б) През точка, нележаща на дадена права, минава една права, успоредна на дадената.
В) Има двойка успоредни прави и пресичаща ги права, която сключва с тях двойка различни кръстни ъгли.
Г) Две различни прави имат най-много една обща точка.

ЗАДАЧА 5. В успоредника $ABCD$ единият ъгъл е с $30°$ по-голям от другия. Кои са градусните мерки на ъглите му?
А) $75°$ и $105°$ **Б)** $70°$ и $120°$ **В)** $73°$ и $107°$ **Г)** $80°$ и $100°$

ЗАДАЧА 6. Колко градуса са съседните ъгли, чиито градусни мерки се отнасят както 5 : 4?

....

ЗАДАЧА 7. Намерете ъглите α, β и γ на триъгълник, ако градусните им мерки се отнасят както 4 : 3 : 8. Определете вида на триъгълника спрямо ъглите му.

....

ЗАДАЧА 8. Намерете обиколката на успоредника $ABCD$, в който диагоналите са перпендикулярни, $\sphericalangle ADB = 60°$ и $BD = 12$ cm.

....

ЗАДАЧА 9. Яна чела 5 дни по 10 страници на ден от една книга, а след това започнала да чете по 2 страници повече. Колко страници е книгата, ако Яна я е прочела за 1 ден по-малко от очакваното в началото?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 9:

....

....

....

....

....

....

....

Тест № 7Б (Изходящ тест)

Име: ....

ЗАДАЧА 1. Какво ще получим след опростяване на израза $(2 + x)(x - 2) - (x - 1)^2$?
А) $-2x - 3$ **Б)** $-2x^2 + 2x + 3$ **В)** $2x + 5$ **Г)** $2x - 5$

ЗАДАЧА 2. Какво ще получим след разлагане на многочлена $x^2 + 6x + 9 - y^2$?
А) $(x + 3 - y)(x + 3 + y)$ **Б)** $x(x + 6) + (3 - y)(3 + y)$
В) $(x + y)(x - y) + 3(2x + 3)$ **Г)** $(x + 3)^2 - y^2$

ЗАДАЧА 3. Кое е решението на уравнението $(5 - x)(5 + x) = x(4 - x) + 9$?
А) $-8,5$ **Б)** -4 **В)** 4 **Г)** $8,5$

ЗАДАЧА 4. Кое от твърденията НЕ е вярно?
А) В произволен триъгълник има най-много един тъп ъгъл.
Б) През точка, нележаща на дадена права, минава една права, успоредна на дадената.
В) Има двойка успоредни прави и пресичаща ги права, която сключва с тях двойка различни кръстни ъгли.
Г) Две различни прави имат най-много една обща точка.

ЗАДАЧА 5. В успоредника $ABCD$ единият ъгъл е с 34° по-голям от другия. Кои са градусните мерки на ъглите му?
А) 75° и 105° **Б)** 70° и 110° **В)** 73° и 107° **Г)** 80° и 100°

ЗАДАЧА 6. Колко градуса са съседните ъгли, чиито градусни мерки се отнасят както 2 : 7?

....

ЗАДАЧА 7. Градусните мерки на ъглите α, β и γ на триъгълник се отнасят както 2 : 4 : 9. Намерете тези ъгли и определете вида на триъгълника спрямо ъглите му.

....

ЗАДАЧА 8. Дължините на страните на успоредник се отнасят както 4 : 3. Намерете страните на успоредника, ако обиколката му е 35 cm.

....

ЗАДАЧА 9. От две селища, разстоянието между които е 208 km, тръгват един срещу друг двама мотоциклетисти. Намерете скоростите им, ако единият се движи с 4 km/h по-бързо от другия и след 2 h те се срещат.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 9:

....

....

....

....

....

....