<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

27.08.2021 г. – Вариант 2

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Ако $a = -\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 3}$**, то** a **е равно на:**

А) -3 **Б)** $-\frac{1}{3}$ **В)** $\frac{1}{3}$ **Г)** 3

2. Стойността на израза $\left(\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^9 .4^{-2}}{\sqrt[3]{8}}\right)^{-1}$ **е:**

А) -4 **Б)** $-\frac{1}{4}$ **В)** $\frac{1}{4}$ **Г)** 4

3. Множеството от допустими стойности на израза $\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}$ **е:**

А) $x \in (2;+\infty)$ **Б)** $x \in (1;2) \cup (2;+\infty)$ **В)** $x \in [1;+\infty)$ **Г)** $x \in [1;2) \cup (2;+\infty)$

4. Множеството от решенията на неравенството $x+\frac{9}{x} \leq 6$ **е:**

А) $x \in (0;3]$ **Б)** $x \in (-\infty;0) \cup \{3\}$ **В)** $x \in (3;\infty) \cup \{0\}$ **Г)** $x \in (0;3) \cup (3;+\infty)$

5. Ако x_1 **и** x_2 **са корени на уравнението** $6x-\frac{1}{x}=1$**, то** $\frac{x_1 x_2}{x_1+x_2}$ **е равно на:**

А) -6 **Б)** -1 **В)** 1 **Г)** 6

6. Броят на наредените двойки числа $(x;\ y)$, които са решения на системата $\begin{vmatrix} x^2+y^2=12 \\ xy=-6 \end{vmatrix}$ **, е:**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

7. Множеството от решения на уравнението $\frac{x}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{9}{x^2-x-2}$ **е:**

А) $\{3\}$ **Б)** $\{2;\ 3\}$ **В)** $\{-3;\ 2\}$ **Г)** $\{-3\}$

8. За всички допустими стойности на α**, изразът** $\sin 2\alpha.(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)$ **е тъждествено равен на:**

А) $\sin 2\alpha$ **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** 2

9. За $\triangle ABC$ **е дадено, че** $AB=6$ **cm и** $BC=8$ **cm. Точката** D **е от страната** BC **така, че** $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ACD.$ **Намерете дължината на отсечката** BD**.**

А) 6 **cm** **Б)** 4,5 **cm** **В)** 4 **cm** **Г)** 3,5 **cm**

10. В правоъгълен $\triangle ABC$ **проекциите на катетите** AC **и** BC **върху хипотенузата** AB **са съответно с дължини** 8 **cm и** 2 **cm. Намерете дължината на катета** AC.

А) 9 **cm** **Б)** $4\sqrt{5}$ **cm** **В)** 6 **cm** **Г)** 5 **cm**

11. Графиката на коя от посочените функции отсича от абсцисната ос отсечка с дължина 3 **мерни единици и минава през точката с координати** $(2;4)$ **?**

А) $y=6-x$ **Б)** $y=x^2+x-2$ **В)** $y=x^2-2x+4$ **Г)** $y=x^2+3x$

12. Първите два члена на числова редица са $a_1=-1$ **и** $a_2=3$**, а останалите членове се пресмятат от равенството** $a_n=(-1)^n.\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{2}$ **за всяко** $n\geq 3,\ n\in\mathbb{N}$**. Петият член на редицата е:**

А) $-\frac{5}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{4}$ **В)** $\frac{1}{4}$ **Г)** $\frac{21}{8}$

13. Първият член на аритметична прогресия е 10 **и сборът от първите седем члена е равен на** 105**. Разликата на прогресията е равна на:**

А) $\frac{5}{3}$ **Б)** $\frac{3}{5}$ **В)** $-\frac{3}{5}$ **Г)** $-\frac{5}{3}$

14. Стойността на израза $2\sin^2 65° - \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4°.\operatorname{tg} 86° + 2\sin^2 25°$ **е:**

А) -2 **Б)** $\frac{4}{7}$ **В)** $\frac{7}{4}$ **Г)** 2

15. Към реда 12, 18, 32, 44, 50, 58, 63 **е добавено число. Ако модата на новия ред е** $m = 58$, **а медианата му е** M, **то разликата** $m - M$ **е равна на:**

А) -11 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 12

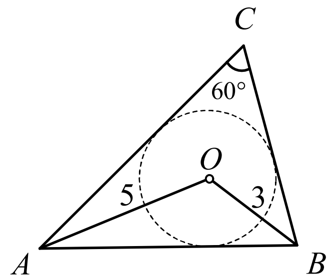
16. Колко петцифрени числа с различни цифри могат да се запишат само с цифрите $2, 0, 5, 3$ **и** 4**?**

А) 18 **Б)** 24 **В)** 96 **Г)** 120

17. В ромба $ABCD$ $\sphericalangle ABC = 120°$ **и** $AC + BD = \left(3 + \sqrt{3}\right)$ **cm. Сборът от радиусите на описаните около** $\triangle ABC$ **и** $\triangle ABD$ **окръжности е равен на:**

А) $\left(4 + 4\sqrt{3}\right)$ **cm** **Б)** $\left(3 + \sqrt{3}\right)$ **cm** **В)** $\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **cm** **Г)** $\left(1 + \sqrt{3}\right)$ **cm**

18. Точка O **е център на вписаната окръжност в** $\triangle ABC$**, за който** $\sphericalangle ACB = 60°$**. Ако** $AO = 5$ **cm и** $BO = 3$ **cm, то дължината на страната** AB **е:**



А) 4 **cm** **Б)** $\sqrt{34}$ **cm** **В)** 6 **cm** **Г)** 7 **cm**

19. В успоредника $ABCD$ **диагоналът** BD = 4 **cm, страната** AD = 2 **cm, а дължината на отсечката, свързваща** D **със средата на** AB**, е** 2 **cm. Дължината на диагонала** AC **е:**

А) $2\sqrt{6}$ **cm** **Б)** $2\sqrt{10}$ **cm** **В)** $4\sqrt{6}$ **cm** **Г)** $2\sqrt{46}$ **cm**

20. В равнобедрен трапец е вписана окръжност с радиус 2 **cm. Малката основа на трапеца е два пъти по-малка от височината му. Намерете лицето на трапеца.**

А) 20 **cm²** **Б)** 16 **cm²** **В)** 12 **cm²** **Г)** 10 **cm²**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\quad a^{\log_a b}=b$ $\quad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\quad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^{\ 2} = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^{\ 2} = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

27.08.2021 г. - Вариант 2

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Ако $a=99$**, то намерете стойността на израза** $A=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}}$.

22. Намерете множеството от решенията на неравенството $\left(x^2-4\right)\left(x^2+1\right)<2x\left(x^2-4\right)$.

23. Числата $\sqrt{2},x,16\sqrt{2},y,z$**, взети в този ред, са последователни членове на растяща геометрична прогресия. Намерете** $x+y-z$**.**

24. В банка са вложени 10 000 **лв. при сложна годишна лихва. Намерете годишният лихвен процент, ако след** 2 **години сумата е нараснала с** 609 **лв.**

25. Основите на равнобедрен трапец *ABCD* **са** *AB* = 40 **cm и** *CD* = 10 **cm, бедрото** $AD=25$ **cm, а точките** *M*, *N*, *P* **и** *Q* **са средите на страните на** *ABCD***. Намерете лицето на четириъгълника** *MNPQ***.**

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Дадени са функциите $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x}}$ **и** $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x}}$**.**

а) Определете дефиниционните им множества.

б) Решете уравнението $f\left(x\right)=g\left(x\right)$**.**

27. Дадени са изразите $A = 3 - 4\cos^2 \alpha$ и $B = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$. Докажете, че:

а) $A = B$ **;**

б) ако $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$ **, то** $B = \frac{11}{4}$ **.**

28. В $\triangle ABC$ **точката** G **е медицентър, а точка** D **е такава, че точка** G **е средата на отсечката** BD**. Намерете лицето на четириъгълника** $ABCD$**, ако** $AG = 3$ **cm,** $BG = 4$ **cm и** $CG = 2$ **cm.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad a^2 = a_1 c$ $\quad b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $\quad r = \frac{a+b-c}{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $\quad m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $\quad m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $\quad l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $\quad S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $\quad S = ab\sin\alpha$ $\quad$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

27.08.2021 г. - Вариант 2

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1	А	2
2	Г	2
3	Г	2
4	Б	2
5	Б	2
6	В	2
7	Г	2
8	Г	2
9	Б	2
10	Б	2
11	Б	3
12	В	3
13	А	3
14	В	3
15	В	3
16	В	3
17	Г	3
18	Г	3
19	Б	3
20	А	3
21	20	4
22	$x\in(-2;1)\cup(1;2)$	4
23	$-188\sqrt{2}$	4
24	3%	4
25	250 **cm^2**	4
26	**а)** $D_f: x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1;2\}$ **и** $D_g: x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{2}{3};1\right\}$	10

	б) $x=-\frac{2}{3}$	
27	**б)** $B=\frac{11}{4}$	**10**
28	$S_{ABCD}=3\sqrt{15}$ **cm²**	**10**

Задача 26.

Решение: а) Дефиниционните множества D_f и D_g на функциите $f(x)$ и $g(x)$ се определят съответно от условията:

$$x\neq 1,\ x\neq 0,\ \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{(x-1)x}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ и } D_f : x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1;2\}$$

$$x\neq 1,\ x\neq 0,\ \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{(x-1)x}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{2}{3} \text{ и } D_g : x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{2}{3};1\right\}.$$

б) Дефиниционното множество DM на уравнението $f(x)=g(x)$ е обединението на D_f и D_g, т.е. $DM : x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{2}{3};1;2\right\}$.

При $x\in DM$ уравнението $\dfrac{x}{\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}}$ е равносилно на $x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}+2+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-1}+2+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow 3+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}.$$

Тъй като $-\frac{2}{3}\in DM$, то е единственото решение на уравнението $f(x)=g(x)$.

Забележка. Ако не се съобрази, че $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$, след освобождаване от знаменател на уравнението $x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$ се получава $3x^2-x-2=0$ с корени $x_1=1\notin DM$ и $x_2=-\frac{2}{3}\in DM$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Определяне на дефиниционните множества D_f и D_g	**4 точки** **(по 2 точки за всяко)**
б) Определяне на дефиниционното множество DM на уравнението $f(x)=g(x)$	**1 точка**

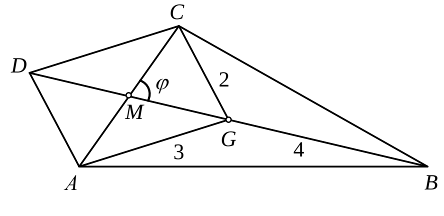
Преобразуване на уравнението $\frac{x}{\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}}$ до получаване на $3+\frac{2}{x}=0$	**4 точки**
Определяне на решението $x=-\frac{2}{3}$	**1 точка**

Задача 27. Решение:

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $B=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=4.\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha-\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha+\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$ $=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)=$	**2 точки**
$=2\left(\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=1-2\cos 2\alpha=1-2\left(2\cos^2\alpha-1\right)=3-4\cos^2\alpha$	**2 точки**
б) От $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{15}$ и основното тригонометрично тъждество получаваме $\begin{vmatrix} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15} \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \end{vmatrix}$	**2 точки**
$\begin{vmatrix} \sin\alpha=\sqrt{15}\cos\alpha \\ \left(\sqrt{15}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sin\alpha=\sqrt{15}\cos\alpha \\ 16\cos^2\alpha=1 \end{vmatrix} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{16}$	**2 точки**
От $A=B$ получаваме, че $B=3-4\cos^2\alpha=3-4.\frac{1}{16}=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$.	**2 точки**

Задача 28.



Решение: Означаваме с M средата на AC. От условието, че G е медицентър и среда на отсечката BD следва, че $MG=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}DG$, т. е. M е среда и на DG.

Тогава $AGCD$ е успоредник със страни $AG=3$ cm, $CG=2$ cm и диагонал $DG=BG=4$ cm.

От равенството $AC^2+DG^2=2AG^2+2CG^2$ намираме $AC^2=2AG^2+2CG^2-DG^2=10$ и $AC=\sqrt{10}$ cm.

Ако $\sphericalangle BMC = \varphi$, от $\triangle CMG$ намираме $\cos\varphi = \dfrac{MG^2 + MC^2 - CG^2}{2MG.MC} = \dfrac{4 + \frac{10}{4} - 4}{2.2.\frac{\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{8}$.

Тогава $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \dfrac{10}{64}} = \sqrt{\dfrac{54}{64}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

Лицето на четириъгълника $ABCD$ е $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}.AC.BD.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}.8.\dfrac{3\sqrt{6}}{8} = 3\sqrt{15}$ cm^2.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Доказване, че $AGCD$ е успоредник	**2 точки**
Пресмятане на диагонала $AC = \sqrt{10}$ cm	**2 точки**
Намиране на $\sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$	**4 точки**
Намиране на лицето $S_{ABCD} = 3\sqrt{15}$ cm^2	**2 точки**