МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XXV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

http://astro-olymp.org

I кръг

Ученици от 11-12 клас – решения

1 задача. Видимост на МКС. Преди 23 години, на 7 декември 1998 година, бе поставено началото на изграждането на Международната космическа станция (МКС). Оттогава броят на модулите на станцията непрекъснато нараства и сега масата ѝ е почти 441 тона. Нека приемем, че станцията се движи по кръгова орбита на височина 420 км, и че наклонът на орбитата ѝ към земния екватор е точно 52°. Освен това предполагаме, че Земята е кълбо с радиус равен на 6371 km.

А) За колко минути станцията прави една обиколка около Земята?

Б) На каква максимална географска ширина станцията може да се вижда в зенита за наблюдател на Земята? В каква посока тя ще се движи относно наблюдателя в този момент?

В) Приблизително на какво разстояние, по земната повърхност, от първия наблюдател се намира втори наблюдател, за когото станцията ще премине през зенита точно след 8 обиколки?

Г) На каква максимална географска ширина станцията може да се види над хоризонта, ако пренебрегнем ефектите от рефракцията и поглъщането на светлината?

Д) Ако станцията се движи по екваториална орбита, то какъв ще бъде интервалът от време между две нейни преминавания през зенита за даден наблюдател?

Решение:

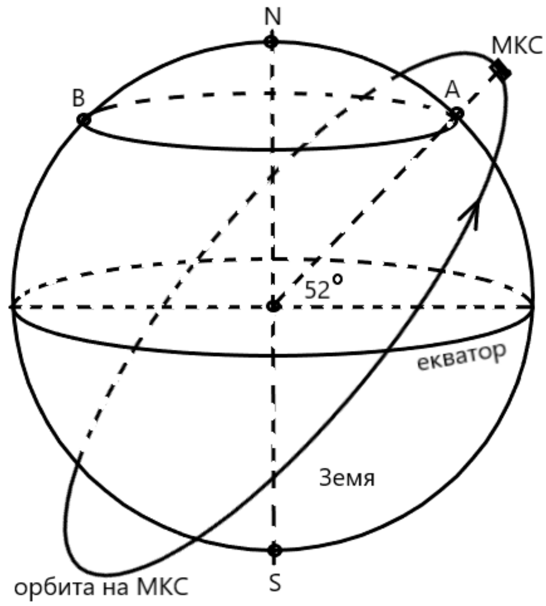
Радиусът на орбитата на космическата станция е $r = 6371 + 420 = 6791$ км. Масата на Земята е $M = 5.97 \times 10^{24}$кг. За да намерим орбиталния период T на станцията, използваме третия закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \approx 5572 \text{ с} \approx 93 \text{ минути}$$

Щом орбитата на станцията е наклонена на ъгъл 52° към земния екватор, то максималната северна географска ширина, на която тя ще преминава през зенита, също ще бъде 52°. Такава ще бъде и максималната южна географска ширина, на която станцията ще преминава през зенита. На схемата с МКС е отбелязана Международната космическа станция.

В момента, в който станцията преминава през зенита за наблюдател на максималната географска ширина от 52°, тя ще се движи успоредно на съответния земен паралел, както можем да се убедим от схемата. Тъй като орбиталният период на станцията е по-малък от периода на околоосно въртене на Земята, видимото движение на станцията за наблюдателя ще бъде в посока от запад на изток.



Нека в даден момент станцията минава през зенита за един наблюдател, намиращ се на 52° северна ширина. Ще означим неговото положение с точка А върху земното кълбо. Положението на втория наблюдател, за когото станцията ще премине през зенита точно след 8 обиколки, ще означим с точка В. Станцията ще извърши 8 обиколки около Земята за време:

$$t = 5572 \text{ с} \times 8 = 44\,576 \text{ с} \approx 12 \text{ ч } 23 \text{ м}$$

За това време земното кълбо ще е направило малко повече от половин завъртане около своята ос. Тъй като от нас се иска да намерим приблизителното разстояние от първия до втория наблюдател, то ще приемем, че Земята е извършила точно половин завъртане около оста си. Следователно, когато станцията завърши своята осма обиколка и се окаже отново над 52-градусовия паралел, под нея ще бъде диаметрално противоположната точка на този паралел. Това ще бъде точката В, в която е вторият наблюдател. Най-краткото разстояние по земната повърхност между двамата наблюдатели ще се измерва по дъгата ANB, минаваща през северния полюс на Земята. Означаваме с R земния радиус и намираме дължината на тази дъга:

$$s = \frac{2 \times (90° - 52°)}{360°} \cdot 2\pi R$$

$$s \approx 8451 \text{ км}$$

Това е и приблизителното разстояние между двамата наблюдатели.

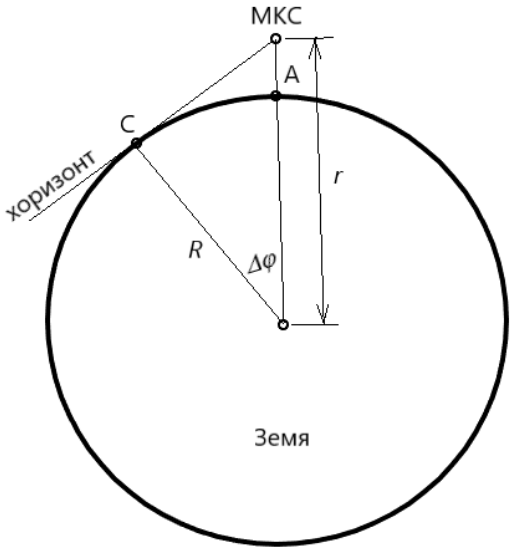
Ако станцията се движеше по орбита в равнината на земния екватор, периода T_1 между две нейни преминавания през зенита за наблюдател в дадена точка от екватора ще намерим от следното равенство:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}$$

Тук с $T_0 = 23\text{ч}\ 56\text{м}$ сме означили звездното денонощие, което е равно на периода на околоосно въртене на Земята. Знакът „минус“ в горната формула означава, че станцията обикаля около Земята в същата посока, в която Земята се върти около оста си.

$$T_1 = \frac{TT_0}{T_0 - T} \approx 5957 \text{ с} \approx 99 \text{ минути}$$

Наблюдателят, намиращ се на максималната географска ширина, от която станцията може да се види над хоризонта, е отбелязан на следващата схема с точка С. Той трябва да бъде на един и същ географски меридиан с наблюдателя в точка А. В момента, когато станцията е в зенита за точка А, тя е точно на хоризонта за точка С. Точка С отстои на ъгъл $\Delta\varphi$ по географска ширина северно от точка А.



Този ъгъл можем да намерим от равенството:

$$\cos \Delta\varphi = \frac{R}{r}$$

$$\Delta\varphi \approx 20.26°$$

Следователно максималната географска ширина, от която станцията може да бъде видяна над хоризонта, ще бъде $52° + 20.26° = 72.26°$.

<u>Критерии за оценяване (общо 10 т.):</u>

За пресмятане на орбиталния период на станцията – 2 т.

За посочване на максималната географска ширина, за която тя ще минава през зенита и определяне на посоката на видимото движение на станцията – 2 т.

За определяне на разстоянието между двамата наблюдатели – 2 т.

За определение на максималната географска ширина, на която станцията може да бъде видяна на хоризонта – 2 т.

За определяне на периода, през който станцията би минавала през зенита за наблюдател на екватора, ако нейната орбита беше екваториална – 2 т.

2 задача. Сянката на спътника.

На снимката виждате сянка на един от Галилеевите спътници върху Голямото червено петно на Юпитер. Изображение на цялата планета със сянката на спътника е дадено на Фиг. 1.

А) Разгледайте внимателно изображенията. Направете измервания по тях и определете сянката на кой от спътниците е заснета.

Вижда се много тънка полусянка покрай плътната сянка на спътника. При слънчеви затъмнения, наблюдавани от нашата планета полусянката на Луната е десетки пъти по голяма от сянката. Защо тук е обратното?

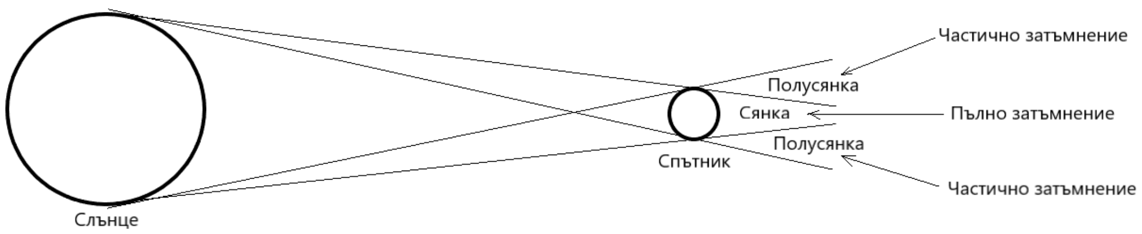
Б) Сянката на спътника не е върху екватора на планетата. Защо?

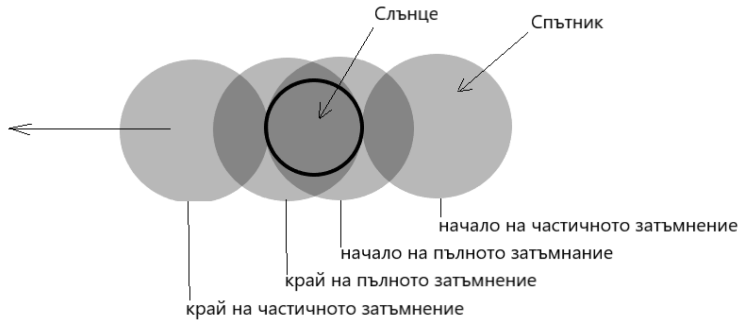
В) Нека приемем, че сянката се движи успоредно на екватора на Юпитер. Ако Юпитер се върти като твърдо тяло с ъгловата скорост на въртене на екваториалните области (пренебрегваме диференциалното въртене), то колко време продължава пълното слънчево затъмнение за наблюдател близо до централния меридиан на видимия диск на планетата?

Решение:

За да определим сянката на кой от спътниците е на снимката, трябва да сравним размера на сянката с размера на Юпитер. Измерваме екваториалния диаметър на диска на Юпитер и получаваме, че той е равен на 129 mm. Измерваме размера на сянката на спътника максимално прецизно и получаваме, че диаметърът на сянката е равен на 4.9 mm. Отношението на екваториалния диаметър на Юпитер към сянката на спътника е 26.3. Намираме информация за истинските физически размери на Юпитер и неговите най-големи спътници. Пресмятаме отношението на екваториалния диаметър на Юпитер и диаметрите на спътниците. Виждаме, че най-близо до получената стойност е отношението на диаметъра на Юпитер и диаметъра на Ганимед – 27.14. Следователно сянката е на най-големия спътник на Юпитер – Ганимед.

При наблюдение от Земята ъгловите размери на Слънцето и Луната са приблизително еднакви. Поради това, че орбитата на Луната е елиптична, в даден момент нейните ъглови размери могат малко да надвишават ъгловите размери на Слънцето и тогава наблюдаваме пълно слънчево затъмнение. То е много кратко, няколко минути, за разлика от продължителността на частичното затъмнение, което продължава над 2 часа преди пълната фаза и още толкова – след пълната фаза. Тези продължителности дават представа за съотношението в размерите на пълната сянка и полусянката на Луната върху земната повърхност. Ако по време на затъмнението Луната е в по-далечната част от своята орбита, нейните ъглови размери може да са по-малки от ъгловите размери на Слънцето и тогава се наблюдава пръстеновидно слънчево затъмнение. В този случай няма пълна сянка на Луната върху земната повърхност, а само полусянка, защото Слънцето в нито един момент не се покрива изцяло от диска на Луната.





Нека пресметнем ъгловите размери на Слънцето и Ганимед, гледани от повърхността на Юпитер. Ще работим с приближение, защото не са необходими точни данни, а обяснение на явлението. Ще използваме голямата полуос на орбитата на Юпитер, като разстояние от Юпитер до Слънцето и голямата полуос на орбитата на Ганимед минус екваториалния радиус на Юпитер, като разстояние от повърхността на Юпитер до Ганимед.

Ъгловият размер на Слънцето, наблюдавано от Юпитер е:

$$\delta_{\odot} = \frac{D_{\odot}}{r_J} = 6.15'$$

където $D_{\odot}$ е диаметърът на Слънцето, а r_J е разстоянието от Юпитер до Слънцето.

Ъгловият размер на Ганимед, наблюдаван от повърхността на Юпитер, когато наблюдателят е близо до линията свързваща центровете на Юпитер и Ганимед, е:

$$\delta_G = \frac{D_G}{r_G - R_J} = 18.13'$$

Виждаме, че дискът на Ганимед е около 3 пъти по-голям от диска на Слънцето. Следователно пълната фаза на затъмнението продължава около 2 пъти по-дълго от частичната. Затова полусянката изглежда по-малка от сянката на Ганимед. *Трябва да отбележим, че ефектът върху дадената снимка е съществено засилен от повишения контраст на изображението, при което се губят най-светлите и най-тъмните участъци от полусянката.*

Наклонът на оста на Юпитер към равнината на неговата орбита е 3.13°. Равнината на орбитите на Галилеевите спътници лежи в равнината на екватора на планетата, с много малки отклонения от няколко десети от градуса. Наклонът на орбитата на Ганимед е 0.2°. Очевидно снимката е правена, когото Юпитер е бил леко наклонен със северния си полюс към Слънцето. Тогава равнината на орбита на Ганимед също е била леко наклонена и сянката на Ганимед се е проектирала върху южното полукълбо на планетата, върху Голямото червено петно.

Щом приемаме, че Юпитер се върти като твърдо тяло, то може да пресметнем линейната скорост на повърхността на планетата на ширината на Голямото червено петно (ГЧП). Ъгловата скорост на екватора и на планетографската ширина на ГЧП е еднаква. Отношението на линейните скорости е равно на отношението на обиколките на екватора и паралела на ГЧП, а следователно и на отношението на екваториалния диаметър на Юпитер към дължината на хордата на ширината на ГЧП.

Измерваме дължината на хордата, която е успоредна на екватора на Юпитер и преминава през ГЧП и центъра на сянката на Ганимед. Получаваме 119 mm. Линейната скорост на точка от паралела на ширината на сянката на Ганимед е:

$$v_p = v_J \frac{D_p}{D_J} = 11.60\ km/s$$

Линейната скорост на движение на Ганимед по орбитата му е:

$$v_G = \frac{2\pi r_G}{T_{orbG}} = 10.88\ km/s$$

Виждаме, че линейната скорост на точка от повърхността на Юпитер на избрания паралел се движи по-бързо от Ганимед по неговата орбита. Следователно, за наблюдател близо до централния меридиан Ганимед ще има ретроградно движение. *Това означава, че наблюдателят ще застига движещата се сянка на Ганимед и ще я задминава в посока изток.* Затъмнението няма да започва от западния край на Слънцето, а от източния и ще завършва с това, че дискът на Ганимед ще напуска западния край на диска на Слънцето. За да пресметнем продължителността на пълната фаза на затъмнението трябва да разделим разликата в ъгловите диаметри на Ганимед и Слънцето на относителната ъглова скорост на диска на Ганимед спрямо диска на Слънцето. Видимата ъглова скорост на Слънцето е равна на ъгловата скорост на Юпитер при движението му по неговата орбита.

$$\omega_\odot = \omega_J = \frac{2\pi}{T_{orbJ}}$$

Ъгловата скорост на Ганимед е равна на разликата между линейните скорости на наблюдателя и на Ганимед, разделени на разстоянието между тях. Тук не трябва да забравяме, че видимото ъглово преместване на Ганимед ще бъде в обратна посока. Видимата ъглова скорост на Ганимед е:

$$\omega_G = \frac{v'_J - v_G}{r_G - R_J}$$

Относителната ъглова скорост на Ганимед относно диска на Слънцето е:

$$\omega' = \omega_G + \omega_\odot$$

Събираме големините на ъгловите скорости, защото видимите движения са в противоположни посоки.

По време на пълната фаза на затъмнението дискът на Ганимед изминава относно диска на Слънцето ъглово разстояние равно на разликата във видимите ъглови размери на Ганимед и Слънцето:

$$\alpha = \delta_G - \delta_\odot$$

Освен това, относителната ъглова скорост на Ганимед спрямо Слънцето е:

$$\omega' = \frac{\alpha}{\Delta t}$$

където Δt е продължителността на пълното затъмнение, която ние търсим:

$$\Delta t = \frac{\delta_G - \delta_\odot}{\omega'} = 79^m = 1^h 19^m$$

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За определяне кой е спътникът, хвърлящ сянка върху Юпитер и обосновка – 2 т.

За обяснение относно ширината на полусянката на спътника – 2 т.
За обяснение защо сянката на спътника не е върху екватора на Юпитер – 2 т.
За пресмятане на продължителността на затъмнението – 4 т.

3 задача. Астероид в перихелий и афелий. Астероид обикаля около Слънцето с период 5 години така, че при наблюдение от повърхността на астероида, Слънцето си променя видимата яркост точно 2 пъти (т.е. в максимален блясък Слънцето е 2 пъти по-ярко, отколкото в минимален блясък). Орбитата на астероида лежи в равнината на земната орбита.

А) Какво е минималното разстояние Земя-астероид?

Б) В момент, когато астероидът е в перихелий (най-близо до Слънцето), за наблюдател от неговата повърхност Слънцето е в съзвездието Скорпион. За колко дни Слънцето ще пресече съзвездието Скорпион при наблюдение от астероида? За наблюдател от Земята, Слънцето при своето видимо годишно движение по небето пресича съзвездието Скорпион за 7 дни**.**

Упътване: Скоростта на астероида в перихелий е

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

където G е гравитационната константа, M е масата на Слънцето, a е голямата полуос на орбитата на астероида, e е ексцентрицитетът на орбитата.

Решение:

Астероидът е на минимално разстояние от Земята, когато е в опозиция и в перихелий едновременно. За да намерим това разстояние, трябва да пресметнем перихелийното разстояние на астероида и да определим на какво разстояние е Земята от Слънцето, когато астероидът е в перихелий. Тук, разбира се, поради дългия период на астероида, предполагаме, че неговата орбита е външна по отношение на орбитата на Земята. Както ще видим от следващите пресмятания, тази хипотеза се оказва вярна. Понеже астероидът за Земята трябва да е в опозиция, то, наблюдавано от Земята, Слънцето също е в съзвездието Скорпион. Това се случва около 26 ноември (±3 денонощия) и тогава разстоянието от Земята до Слънцето е около 147 636 000 km (може да се намери за съответната дата примерно в компютърната програма Stellarium, показваща звездното небе) Изразено в астрономически единици, това разстояние е приблизително $r'_\oplus = 0.9869$ au.

Видимият блясък на Слънцето се определя от осветеността, която то създава на повърхността на астероида. Осветеността върху повърхността на астероида се променя обратнопропорционално на квадрата на разстоянието до Слънцето. Записваме закона за обратните квадрати за перихелийното и афелийното растояние на астероида:

$$\frac{E_p}{E_a} = \frac{r_a^2}{r_p^2} = 2$$

Следователно:

$$r_a = r_p \cdot \sqrt{2}$$

Очевидно:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

където a е голямата полуос на орбитата на астероида.

Решаваме системата от последните две уравнения относно r_p :

$$r_p = \frac{2a}{1+\sqrt{2}}$$

Голямата полуос на орбитата на астероида намираме от третия закон на Кеплер. Използваме кратката форма на закона, като имаме предвид, че за Земята приемаме голямата полуос равна на 1 au (астрономическа единица) и орбиталния период равен на 1 година:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

$$a = T^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} = 2.924 \text{ au}$$

Оттук за r_p получваме:

$$r_p = 2.422 \text{ au}$$

Следователно минималното разстояние r_{aE} между астероида и Земята е:

$$r_{aE} = r_p - r'_{\oplus} = 1.425 \text{ au}$$

Времето, за което Слънцето пресича съзвездието Скорпион, зависи от видимата ъглова скорост на Слънцето, гледано от съответното космическо тяло. Ъгловата скорост, при движение в перпендикулярно направление относно линията, свързваща космическото тяло и Слънцето, е пропорционална на линейната скорост на тялото по орбитата и обратнопропорционална на разстоянието до Слънцето. За да определим линейната скорост на астероида, използвайки дадената формула, трябва да намерим ексцентрицитета на неговата орбита. Това може да направим от зависимостта, даваща връзката между перихелийното разстояние и голямата полуос на орбитата:

$$r_p = a(1-e)$$

Откъдето следва:

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 0.1717$$

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 20.72\ km/s$$

Линейната скорост на Земята може да приемем за 30 km/s, но е възможно и да я пресметнем от формулата, която дава връзката между моментната скорост по елиптичната орбита, моментното разстояние до централното тяло, в случая това е Слънцето, и голямата полуос на орбитата:

$$v'_{\oplus} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r'_{\oplus}} - \frac{1}{a_{\oplus}}\right)} = 30.18\ km/s$$

където $v'_{\oplus}$ е моментната скорост на Земята, когато астероидът е едновременно в перихелий и в опозиция, а $a_{\oplus}$ е голямата полуос на земната орбита, равна на 1 au. Поради много малкия ексцентрицитет на земната орбита приемаме, че скоростта на Земята винаги е перпердикулярна на линията Земя-Слънце.

Интервалът от време, за който Слънцето пресича участък от небето, принадлежащ на съзвездието Скорпион, наблюдавано от Земята, е равен на $\Delta t_{\oplus} = 7^d$. Отношението на интервалите от време, за които Слънцето пресича един и същи участък от небето, е равно на обратното отношение на ъгловите скорости на Слънцето, наблюдавани от двете тела:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_{\oplus}} = \frac{v'_{\oplus}}{r'_{\oplus}} \cdot \frac{r_p}{v_p}$$

Следователно когато наблюдаваме от астероида, Слънцето ще пресича участъка от небето принадлежащ на съзвездието Скорпион за интервал от време:

$$\Delta t = 25^d$$

Ако използваме взети от справочни източници средни величини за разстоянието на Земята от Слънцето и за скоростта на Земята по нейната орбита, или перихелийното разстояние на Земята, поради това, че в края на ноември тя е близо до перихелия на своята орбита, ще получим интервал от време между 24 и 25 денонощия. Тези резултати приемаме като възможен вариант на решението на задачата, защото в условието е даден интервал от време за пресичане на границите на съзвездието Скорпион, равен на 7 денонощия, при наблюдение от Земята, което е доста съществено приближение относно истинската стойност.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За правилен метод за определяне на минималното разстояние между Земята и астероида – 4 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

За правилен начин за определяне на времето, за която Слънцето ще пресече съзвездието Скорпион при наблюдение от астероида – 4 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

При използване на средното разстояние от Земята до Слънцето и средната скорост на Земята ще се получат леко различни числени резултати, но както беше отбелязано, такова решение трябва да се оценява като вярно, ако пресмятанията са направени правилно.

4 задача. Екзопланетата K2-286b. Планетата K2-286 b обикаля около хладна звезда от спектрален клас M0V (червено джудже) с маса 0.64 слънчеви маси в съзвездието Везни. Масата на планетата е 6.85 земни маси, а нейният радиус е 2.03 земни радиуса. Орбиталният период на K2-286 b около червеното джудже е 27.36 дни.

А) Пресметнете втората космическа скорост за планетата K2-286 b.

Упътване: Втората космическа скорост v_2, известна още като „скорост на избягване" за повърхността, е скоростта, която даден обект на повърхността на масивно тяло (астероид, планета, звезда) трябва да придобие, за да се изтръгне от гравитацията на тялото и да го напусне завинаги. Ако M е масата на масивното тяло, а R е радиусът му, втората космическа скорост се пресмята по формулата:

$$v_2 = \sqrt{2GM/R}$$

В тази формула $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/(kg s^2) е гравитационната константа. За Земята втората космическа скорост е 11.186 километра в секунда.

Б) Средната плътност на Земята е 5.51 g/cm^3. Пресметнете средната плътност на планетата K2-286 b. Кои планети от Слънчевата система са по-плътни от K2-286 b?

В) Като използвате третия закон на Кеплер, пресметнете разстоянието от планетата K2-286 b до червеното джудже и скоростта, с която планетата се движи по орбитата си. Орбиталната скорост на Земята около Слънцето е 29.78 km?s.

Решение:

Означаваме с M и R масата и радиуса на планетата, а с M_0 и R_0 – масата и радиуса на Земята. Записваме формулите за втора космическа скорост за планетата и за Земята:

$$v_2 = \sqrt{2GM/R}$$
$$v_{02} = \sqrt{2GM_0/R_0}$$

Разделяме двете равенства почленно и намираме:

$$v_2 = v_{02}\sqrt{\frac{M/M_0}{R/R_0}}$$

Получената формула ни позволява да опростим значително нашите пресмятания, тъй като в нея можем да заместим направо масата на планетата, дадена в земни маси и радиуса на планетата, даден в земни радиуси:

$$v_2 \approx 20.55\ \text{км/с}$$

По подобен начин записваме формулите за плътността на планетата и плътността на Земята:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\rho_0 = \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi {R_0}^3}$$

Тези равенства също разделяме почленно и получаваме:

$$\rho = \rho_0 \frac{M}{M_0} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3}$$

$$\rho \approx 4.51\ \text{г/см}^3$$

В Слънчевата система три планети имат по-висока плътност от плътността на K2-286 b. Те са Меркурий, Венера и Земята.

Означаваме с M_S, r и T масата на звездата, около която обикаля далечната планета, радиуса на орбитата на планетата и нейния орбитален период, а с M_{0S}, r_0 и T_0 – съответно масата на Слънцето, радиуса на земната орбита и орбиталния период на Земята. Записваме третия закон на Кеплер за планетата и за Земята:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$$

$$\frac{{r_0}^3}{{T_0}^2} = \frac{GM_{0S}}{4\pi^2}$$

Разделяме равенствата почленно и пресмятаме:

$$\frac{(r/r_0)^3}{(T/T_0)^2} = M_S/M_{0S}$$

$$r(\text{в астр. единици}) = \sqrt[3]{M_S(\text{в слънчеви маси}).T^2(\text{в години})}$$

$$r \approx 0.153\ \text{астр. единици}$$

За орбиталните скорости на планетата можем да напишем:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v \approx 60.88\ \text{км/с}$$

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За пресмятане на втора космическа скорост – 2 т.

За определяне на средната плътност на планетата – 3 т.

За изброяване на планетите с по-висока плътност в Слънчевата система – 1 т.

За пресмятане на радиуса на орбитата на планетата – 3 т.

За намиране на орбиталната скорост на планетата – 1 т.

5 задача. Червеното джудже и звездите. Наблюдавани са три млади звезди от главната последователност със спектрални класове G8V, B9V и B5V. Оказва се, че всяка от трите звезди има спътник: червено джудже от спектрален клас M4V. Продължително време са наблюдавани спектрални линии на червеното джудже и е построена крива на лъчевите скорости. Оказва се, че и при трите звезди кривата е правилна синусоида с период 1 година и амплитуда ±30 km/s. Определете разстоянието от червеното джудже до всяка една от звездите, както и наклона на орбитата на червеното джудже за всяка от трите звезди. Използвайте таблицата и диаграмата, дадени на Фиг. 2 и Фиг. 3.

Дали измерванията на лъчевите скорости на трите звезди са били коректни, или при някоя от тях е допусната грешка? Обяснете вашия отговор.

Решение:

От таблицата на Фиг. 3 по спектралния клас на всяка звезда може да определим логаритъма на светимостта ѝ, изразена в слънчеви светимости. От графиката, дадена на Фиг. 2, по светимостта на звездата може да определим логаритъма на нейната маса, изразена в слънчеви маси. След като сме определили масата на звездата, от третия закон на Кеплер може да определим голямата полуос на относителната орбита на червеното джудже около нея. Понеже кривите на лъчевите скорости са правилни синусоиди, то орбитите на червените джуджета около трите звезди са кръгови. Следователно можем да определим радиуса на относителната орбита на всяко от трите червени джуджета около съответната звезда:

$$\frac{{a_{rd}}^3}{T^2} = \frac{\gamma(M_* + M_{rd})}{4\pi^2}$$

където M_* е масата на звездата, M_{rd} е масата на червеното джудже, a_{rd} е радиусът на относителната орбита на червеното джудже около звездата, а T е неговият период на орбитално движение. Масата на червеното джудже не може да се пренебрегне, защото въпреки много пъти по-малката светимост, то има много голяма плътност и масата му или е сравнима с масата на звездата, или е по-малка само на един порядък.

Делим това уравнение на същото уравнение, написано за Земята и Слънцето, в което пренебрегваме масата на Земята, и получаваме запис на уравнението в който масите са изразени в слънчеви маси, радиусите – в радиуси на земната орбита, т.е. в астрономически единици, и периодите в земни години. Константите при този запис на третия закон на Кеплер се съкращават. Като имаме предвид, че по условие периодът на всяко от трите червени джуджета е равен на една година, за радиуса на неговата относителна орбита около звездата получаваме:

$$a_{rd} = \sqrt[3]{(M_* + M_{rd})}$$

Поради кръговата орбита, това е търсеното разстояние от червеното джудже до звездата. Нека представим резултатите от измерванията и пресмятанията за червените джуджета и трите звезди в таблица:

Sp	$\lg(L_*/L_\odot)$	$\mathrm{Lg}(M_*/M_\odot)$	$M_*/M_\odot$	M_*+M_{rd} [$M_\odot$]	a_{rd} [au]
M4V	−2.20	−0.72	0.19		
G8V	−0.16	0.00	1.0	1.19	1.06
B9V	+1.60	+0.40	2.5	2.69	1.39
B5V	+2.74	+0.70	5.0	5.19	1.73

Лъчевите скорости, които измерваме обаче, са резултат от движението на червеното джудже по орбитата му около общия център на масите на системата звезда-червено джудже. Радиусът на относителната орбита е сума от радиусите на индивидуалните орбити на компонентите в системата около центъра на масите. Знаем, че отношението на тези радиуси е обратнопропорционално на масите на звездите:

$$\frac{r_*}{r_{rd}} = \frac{M_{rd}}{M_*}$$

Добавяме 1 към двете страни на уравнението и преобразуваме:

$$\frac{r_* + r_{rd}}{r_{rd}} = \frac{M_{rd} + M_*}{M_*}$$

Числителят в лявата част на уравнението е равен на радиуса на относителната орбита. Следователно за радиуса на орбитата на червеното джудже около центъра на масите получаваме:

$$r_{rd} = a_{rd} \cdot \frac{M_*}{M_{rd} + M_*}$$

Пресмятаме за всяка от звездите:

За звездата от спектрален клас G8V r_{rd} = 0.89 au.

За звездата от спектрален клас B9V r_{rd} = 1.29 au.

За звездата от спектрален клас B5V r_{rd} = 1.67 au.

Периодът на всяко от червените джуджета по неговата орбита е 1 година. Тогава за звездата от спектрален клас G8V е очевидно, че червеното джудже трябва да се движи около нея със скорост по-малка от скоростта, с която Земята се движи по своята орбита, защото радиусът на орбитата, а следователно и дължината на орбитата на червеното джудже, са по-малки от радиуса и дължината на орбитата на Земята, а времето за което двете тела правят една обиколка, е еднакво.

Скоростта на Земята по нейната орбита е приблизително 30 km/s. Скоростта на червеното джудже по неговата орбита е равна на дължината на орбитата, разделена на времето, за което то прави една обиколка около центъра на масите. Периодите, обаче, са еднакви и равни на една година. Следователно отношенията на орбиталните скорости са пропорционални на отношенията на радиусите на орбитите на телата. Сравняваме със скоростта на Земята около Слънцето и като имаме предвид, че радиусът на орбитата на Земята е с голяма точност равен на 1 au, за скоростта на червеното джудже около звездата получаваме:

$$v_{rd} = v_E \cdot r_{rd}$$

където v_E = 30 km/s е приблизителната средна скорост на Земята по нейната орбита, а радиусът r_{rd} на орбитата на червеното джудже е в астрономически единици.

Пресмятаме за трите звезди и получаваме:

За звездата от спектрален клас G8V v_{rd} = 26.7 km/s.

За звездата от спектрален клас B9V v_{rd} = 38.7 km/s.

За звездата от спектрален клас B5V v_{rd} = 50.1 km/s.

Ако наклонът на орбитата е $i = 90°$, то зрителният лъч от земния наблюдател лежи в равнината на орбитата на червеното джудже. При кръгова орбита максималната наблюдавана лъчева скорост на червеното джудже е равна на неговата скорост на орбитално движение около центъра на масите на системата. Когато обаче зрителният лъч не лежи в равнината на орбитата, наблюдаваната максимална лъчева скорост е по-малка от скоростта на движение на червеното джудже по неговата орбита. Следователно при наблюдението на звездата G8V е допусната неточност в определянето на лъчевите скорости, защото не е възможно лъчевата скорост на червеното джудже в даден момент да надвишава неговата орбитална скорост. Ако предположим, че допуснатата неточност е минималната при получаването на наблюдаваната крива на лъчевите скорости, то червеното джудже около тази звезда има наклон на орбитата близък до 90° и лъчът на зрение лежи в равнината на орбитата.

В общия случай от елементарни геометрични съображения е очевидно, че наблюдаваната максимална лъчева скорост на червеното джудже е свързана с орбиталната му скорост чрез съотношението:

$$v_r = v \cdot sin(i)$$

където $v = v_{\mathrm{rd}}$ е орбиталната скорост на червеното джудже. Оттук за наклона на орбитата получаваме:

$$i = arcsin\left(\frac{v_r}{v_{rd}}\right)$$

Пресмятаме наклона на орбитите за останалите две червени джуджета:

За спътника на звездата от спектрален клас B9V получаваме, че $i = 50.8°$.

За спътника на звездата от спектрален клас B5V получаваме, че $i = 36.8°$.

<u>Критерии за оценяване (общо 10 т.):</u>

За получаване на данните за звездите от таблицата и графиката – 2 т.

За определяне на разстоянието между всяка от трите звезди и нейния спътник – червено джудже – 3 т.

За определяне при коя от трите двойни системи е допусната грешка при получаването на лъчевите скорости и обяснение – 2 т.

За определяне на наклоните на орбитите при другите две системи – 3 т.

6 задача. Откриване на екзопланети. През 2016 г. около най-близката до нас звезда Proxima Centauri беше открита планета. Тя се обозначава като Proxima b. Потърсете информация за радиусите на Proxima Centauri и на Слънцето, за радиусите на Proxima b и на Земята, за радиусите на орбитите на двете планети и орбиталния период на планетата Proxima b.

Вие сте астроном и търсите екзопланети по метода на пасажите. Сравнете вероятността да откриете планета като Proxima b около звезда като Proxima Centauri с вероятността ваши извънземни колеги да открият Земята около Слънцето. Направете сравнението по два начина:

А) При дългосрочни патрулни наблюдения от значение е вероятността една звезда да се наблюдава в даден момент от време, именно когато планетата преминава пред диска на звездата. Намерете тази вероятност за Земята и за планетата около Проксима.

Б) За да се наблюдава пасаж на планетата пред звездата е важно къде се намира наблюдателят относно равнината на орбитата на планетата. Намерете вероятността за откриване на Земята и на планетата около Проксима, основана на геометричното положение на наблюдателя.

Приемете, че пасажът може да се регистрира, при положение че поне половината от видимия диск на планетата попада на фона на видимия диск на звездата.

Решение:

Намираме информация за необходимите числени данни. Въвеждаме следните означения:

Радиус на Слънцето $R_0 = 696\ 000$ км

Радиус на звездата Proxima Centauri $R_{0P} = 0.1542 R_0$

Радиус на Земята $R = 6371$ км

Радиус на планетата Proxima Centauri b $R_p = 1.3R$

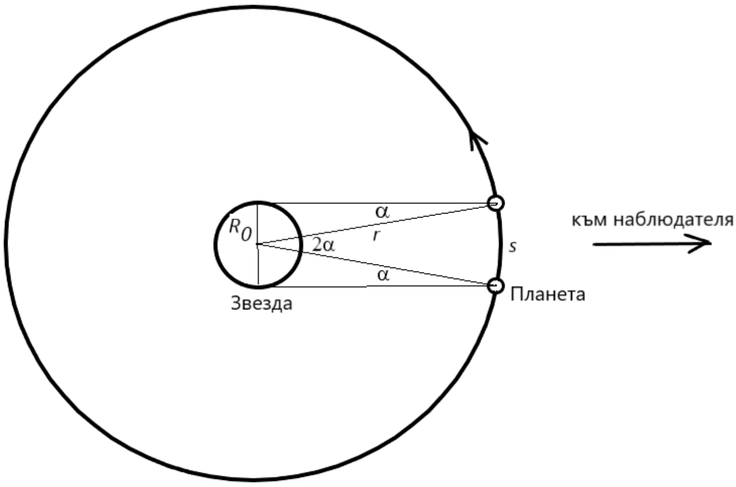
Радиус на орбитата на Земята около Слънцето $r = 149.6 \times 10^6$ км

Радиус на орбитата на Proxima Centauri b около звездата $r_p = 0.04857r$

Орбитален период на Земята $T = 365.25$ денонощия

Орбитален период на планетата Proxima Centauri b $T_p = 11.184$ денонощия

За да открием съществуването на планета около някаква звезда, ние трябва да наблюдаваме звездата известно време и да имаме шанса при някое от нашите наблюдения да се случи преминаване (пасаж) на планетата пред звездата. При това ние ще регистрираме леко намаляване на блясъка на звездата и по това ще съдим за присъствието на планета около нея. Вероятността да открием планетата ще се определя от това каква част от орбиталния период на планетата представлява интервалът от време, през който се наблюдава пасаж.



На схемата е представена звезда около която се движи планета. Ако пасажът може да се регистрира, когато поне половината от видимия диск на планетата закрива диска на звездата, то времетраенето на пасажа се определя от дъгата s, която изминава планетата. Тази дъга съответства на ъгъл 2α, който можем да определим от формулата:

$$\sin\alpha = \frac{R_0}{r}$$

Ако T е орбиталният период на планетата, то времетраенето на пасажа ще бъде:

$$\Delta t = T \cdot \frac{2\alpha}{360°}$$

Вероятността P да открием планетата ще се определя от съотношението:

$$P = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\alpha}{180°}$$

За случая на Земята получаваме:

$$P \approx 0.00148$$

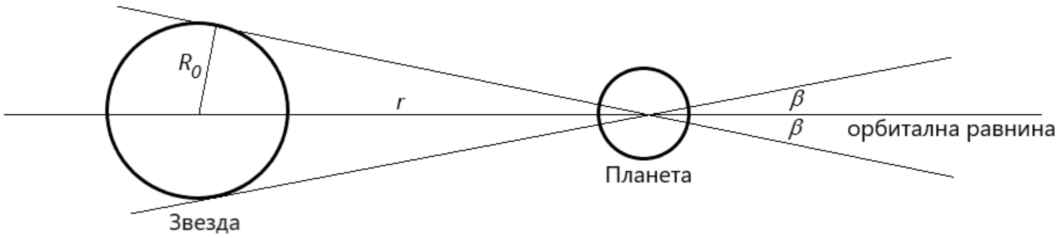
За планетата Proxima Centauri b:

$$P_p \approx 0.0047$$

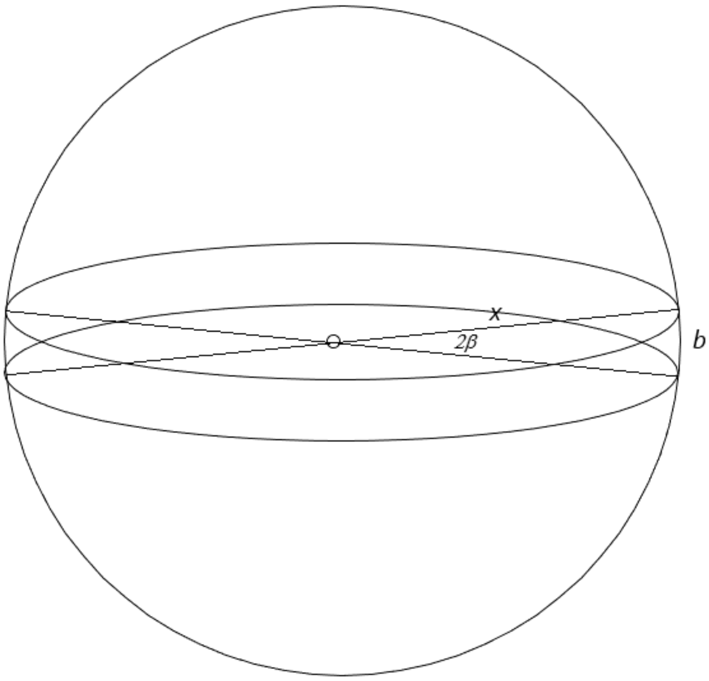
Следователно вероятността да бъде открита планетата около Proxima Centauri, оценена въз основа на продължителността на пасажа, е около 3 пъти по-голяма, отколкото вероятността да бъде открита Земята.

Възможността да открием далечна планета по метода на пасажите зависи и от нашето геометрично разположение спрямо орбиталната равнина на планетата около нейната звезда. Пасажът може да се регистрира, ако поне половината от видимия диск на планетата закрива звездата. В такъв случай, за да види пасажа, наблюдателят трябва да е в такава позиция, че зрителният лъч от него към планетата да не сключва с нейната орбитална равнина ъгъл по-голям от някаква максимална стойност. На следващата схема този максимален ъгъл е означен с β. Можем да го намерим от равенството:

$$\sin\beta = \frac{R_0}{r}$$



Да си представим множество наблюдатели, отдалечени на еднакво разстояние x от планетата. Те се намират върху сфера с център в планетата и радиус x. Пасажите на планетата по диска на звездата ще могат да виждат само онези от наблюдателите, които се намират в ивицата от сферата с ширина b, която съответства на ъгъл 2β.



Ако изразим този ъгъл в градуси, за ширината на ивицата намираме:

$$b = \frac{2\beta}{180°}\pi x$$

Тъй като и в двата случая, които разглеждаме, радиусът на звездата е много по-малък от разстоянието до планетата, то можем да считаме, че ъгълът 2β е много малък. Тогава площта на ивицата ще бъде:

$$\Delta S \approx 2\pi x b = \frac{4\pi^2\beta x^2}{180°}$$

Площта на цялата сфера е:

$$S = 4\pi x^2$$

Сега вече можем да оценим вероятността ние като наблюдатели да попаднем в ивицата на видимост на пасажите и да открием планетата:

$$P = \frac{\Delta S}{S}$$
$$P = \frac{\pi\beta}{180°}$$

По този начин оценката за вероятността да бъде открита Земята около Слънцето ще бъде:

$$P \approx 0.0047$$

За вероятността да бъде открита Proxima Centauri b получаваме:

$$P_p \approx 0.015$$

Отново намираме, че вероятността да бъде открита планетата около Proxima Centauri е около 3 пъти по-голяма, отколкото вероятността да бъде открита Земята около Слънцето.

От нашите изчисления заключаваме, че по-лесно се откриват планети, които се намират на по-близки разстояния до своите звезди. Не случайно преобладаващото множество открити досега екзопланети са именно такива – те се движат около своите звезди по орбити с твърде малки радиуси. Това дава и още едно голямо преимущество на тези планети по отношение на вероятността да бъдат открити. При кратките периоди, с които те обикалят около звездите, честотата, с която се повтарят пасажите, е достатъчно висока. Това позволява в кратки срокове да се наблюдават множество пасажи на една и съща планета и да се съберат много наблюдателни данни, позволяващи да се определят по-точно нейните параметри, както и параметрите на нейната орбита. Наистина, трудно можем днес да си представим астроном, който би се заел със системно изучаване на пасажите на планета като Сатурн например, чиито орбитален период около Слънцето е цели 30 години.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

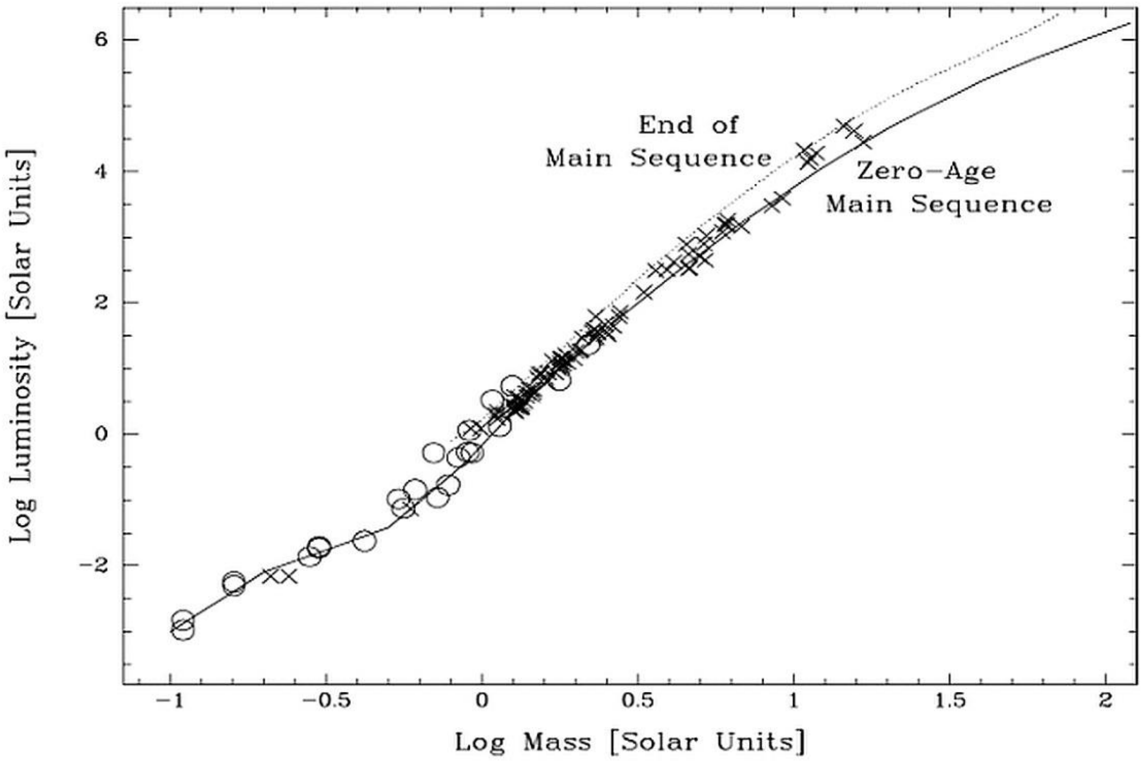
За правилен метод за оценяване на вероятността за откриване на планета въз основа на продължителността на пасажите – 3 т.

За числени оценки на вероятността за откриване на двете планети – 2 т.

За правилен метод за оценяване на вероятността за откриване на планета според геометричното разположение на наблюдателя – 3 т.

За числени оценки на вероятността за откриване на двете планети по този втори начин – 2 т.

Фиг. 1. Юпитер и сянка на един от Галилеевите спътници – към задача 2.



Фиг.2. Зависимост на логаритъма на светимостта на звездите от Главната последователност от логаритъма на тяхната маса, в слънчеви светимости и маси.

Table 1. Properties of main-sequence stars

Beginning of main sequence		
T_{eff} (K)	Spectral type	$\log L/L_{\odot}$
53 300	O3 V	+6.25
48 200	O4 V	+5.73
37 900	O8 V	+5.29
28 000	B0.2 V	+4.01
17 200	B5 V	+2.74
10 700	B9 V	+1.60
6380	F5 V	+0.32
5640	G8 V	–0.16
4860	K2 V	–0.61
3890	M0 V	-1.42
3300	M4 V	–2.2:
2900	M7 V	–3.0:

Фиг. 3. Зависимост на логаритъма на светимостта, в слъчеви светимости, от спектралния клас на звезда.