**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**МАТЕМАТИКА**

**20 май 2022 г.**

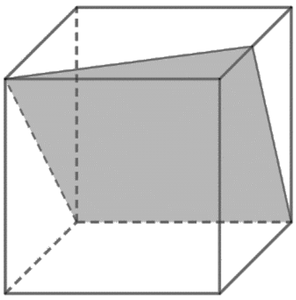
**ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА**

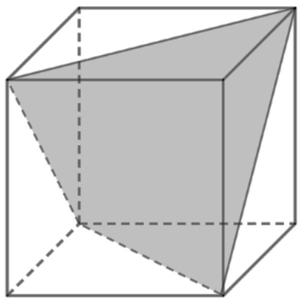
**ВАРИАНТ 1**

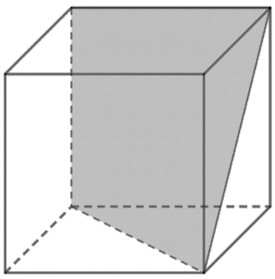
**ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)**

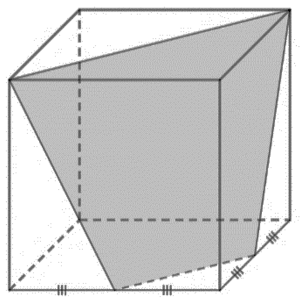
*Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!*

**1. На кой от чертежите е изобразено сечение на куб с равнина?**

А) 

Б) 

В) 

Г) 

**2. Центърът на коя от дадените окръжности лежи на правата с уравнение** $y = \frac{1}{2}x$ **?**

А) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

Б) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 8$

В) $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 25$

Г) $(x-3)^2 + y^2 = 4$

3. **Стойността на реалното число *k*, за която правите с уравнения $y = 2x - 3$ и $y = -2kx + 1$ са успоредни, е равна на:**

А) $k = -2$ Б) $k = -1$ В) $k = 0,25$ Г) $k = 1$

4. **Случайната величина *X* има разпределение**

| ***X*** | **– 1** | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|---|
| ***P*** | **0,4** | **0,3** | ***a*** | **0,1** |

**Дисперсията на величината е:**

А) – 1 Б) 0 В) 1 Г) 0,25

5. **Остатъкът от делението на полинома $x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 3$ с полинома $x - 1$ е:**

А) $x + 1$ Б) 0 В) – 1 Г) – 2

6. **Периодът *T* на функцията $f(x) = tg2x$ е равен на:**

А) $T = 2\pi$ Б) $T = \pi$ В) $T = \frac{\pi}{2}$ Г) $T = \frac{\pi}{4}$

7. **В правоъгълна координатна система са дадени вектори с координати съответно $\vec{a}(1;2)$ и $\vec{b}(-1;1)$. Координатите на вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ са:**

А) (0; 3) Б) (2; 1) В) (3; –3) Г) (3; 3)

8. **Намерете границата $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 - \sqrt{1 + x}}{x - 3}$.**

А) – 0,25 Б) 0 В) 0,25 Г) + ∞

9. **Сумата на безкрайната геометрична прогресия** $\sin 45°,\ -\sin^2 45°,\ \sin^3 45°,\ldots,\left(-1\right)^{n+1}\sin^n 45°\ldots$ **е равна на:**

А) $2-\sqrt{2}$ Б) $\sqrt{2}-1$ В) $\sqrt{2}+1$ Г) $2+\sqrt{2}$

10. **Тангенсът на ъгъла, който допирателната към графиката на функцията** $f\left(x\right)=2x^3-3x-1$ **в точката с абсциса** $x=1$ **образува с положителната посока на абсцисната ос, е равен на:**

А) –2 Б) –1 В) 1 Г) 3

11. **Локалният минимум на функцията** $y(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$ **е равен на:**

А) $y_{\min}=-3$ Б) $y_{\min}=-\frac{5}{3}$ В) $y_{\min}=1$ Г) $y_{\min}=9$

12. **Инфлексната точка на графиката на функцията** $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+9$ **е разположена:**

А) в I квадрант Б) във II квадрант

В) в III квадрант Г) в IV квадрант

13. **За функцията** $f\left(x\right)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ **е вярно, че:**

А) няма асимптоти

Б) има само една вертикална асимптота

В) има една вертикална и една хоризонтална асимптоти

Г) има две вертикални и една хоризонтална асимптоти

14. **Втората производна на функцията** $y(x)=\left(2x-3\right)^5$ **е:**

А) $y''(x)=\left(2x-3\right)^3$ Б) $y''(x)=20\left(2x-3\right)^3$

В) $y''(x)=40\left(2x-3\right)^3$ Г) $y''(x)=80\left(2x-3\right)^3$

**15. В три книжарници докарали по равен брой сборници. В първата книжарница отношението на броя на сборниците по математика и по чужд език е 5:3, във втората е съответно 2:1, а в третата те са равен брой. Вероятността случайно избран сборник от случайно избрана от тези книжарници да е по математика е равна на:**

А) $\frac{49}{72}$ Б) $\frac{47}{72}$ В) $\frac{43}{72}$ Г) $\frac{41}{72}$

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**

---

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**МАТЕМАТИКА**

**20 май 2022 г.**

**ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА**

**ВАРИАНТ 1**

**ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)**

*Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!*

**16. В правилния тетраедър $ABCD$ точката $M$ е център на триъгълника $ACD$, а $N$ е среда на ръба $BC$. Намерете косинуса на ъгъла между векторите $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{DN}$.**

**17. Дадени са полиномите $P(x)=ax^3+bx^2-2x-5$ и $Q(x)=10x^3+39x^2+39x+10$, като е известно, че $x+1$ и $x-1$ са делители на $P(x)$.**

**а) Намерете коефициентите $a$ и $b$.**

**б) Разложете на множители $P(x)$ и $Q(x)$.**

**в) Намерете първата производна на функцията $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.**

18. **Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с катети $AC=4$ cm и $BC=3$ cm. Точките $M \in AB$, $P \in BC$ и $Q \in AC$ са такива, че $MP \perp BC$, $MQ \perp AC$ и $MQ = x$. Ротационно тяло $G$ е получено при завъртане на $MPCQ$ около страната си $QC$.**

**а) Да се изрази като функция на $x$ обемът на ротационното тяло $G$.**

**б) Да се определи за кои стойности на $x$ ротационното тяло $G$ има максимален обем и да се намери този обем.**

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**МАТЕМАТИКА**

**20 май 2022 г.**

**ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА**

**ВАРИАНТ 1**

**Ключ с верните отговори**

| № | Отговор | Брой точки |
|---|---|---|
| 1. | Г | 3 |
| 2. | В | 3 |
| 3. | Б | 3 |
| 4. | В | 3 |
| 5. | Г | 3 |
| 6. | В | 4 |
| 7. | Г | 4 |
| 8. | А | 4 |
| 9. | Б | 4 |
| 10. | Г | 4 |
| 11. | Б | 4 |
| 12. | А | 4 |
| 13. | Г | 4 |
| 14. | Г | 4 |
| 15. | В | 4 |
| 16. | $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ | 15 |
| 17. | а) $a=2$ и $b=5$;<br>б) $P(x)=(2x+5)(x-1)(x+1)$<br>$Q(x)=(x+1)(2x+5)(5x+2)$<br>в) $f'(x)=\frac{7}{(5x+2)^2}$ | 15 |
| 18. | а) $V=\frac{4\pi}{3}x^2(3-x)$<br>б) $\frac{16\pi}{3}$ при $x=2$ | 15 |

**Задача 16.**

**Решение:**

Нека $p$ е дължината на ръбовете. Полагаме $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$.

Понеже тетраедърът е правилен, имаме, че

$\vec{x}^2=\vec{y}^2=\vec{z}^2=p^2$ и $\vec{x}.\vec{y}=\vec{x}.\vec{z}=\vec{y}.\vec{z}=\frac{1}{2}p^2$.

От условието следва, че

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = -\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}$ ,

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$ и $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}$

Пресмятаме, че $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN} = \left(-\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right).\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}\right) = -\frac{1}{3}p^2$

$$\left|\overrightarrow{BM}\right|^2 = \left(-\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right)^2 = \frac{2}{3}p^2$$

$$\left|\overrightarrow{DN}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}\right)^2 = \frac{3}{4}p^2$$

Оттук се пресмята, че косинусът на ъгъла $\theta$ между векторите $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{DN}$ е

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{DN}|} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Отговор: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

**Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:**

| | |
|---|---|
| Избор на векторна база в пространството, така че за всеки два вектора от тази база да е известно тяхното скаларно произведение (например базата $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$). | 5 точки |
| Правилно изразяване на векторите $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{DN}$ чрез избрания базис. | 5 точки |
| Правилно пресмятане на $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}$, $\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2$, $\left\|\overrightarrow{DN}\right\|^2$ и $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}}{\|\overrightarrow{BM}\|\|\overrightarrow{DN}\|} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ | 5 точки |

**Задача 17.**

**Решение:**

а) От условието следва, че $P(-1) = P(1) = 0$. Тогава $a + b = 7$ и $b - a = 3$ откъдето $a = 2$ и $b = 5$.

б) Използване схемата на Хорнер и получаване, че $P(x) = (2x+5)(x-1)(x+1)$. За да се намерят нулите на $Q(x)$ се решава уравнението $10x^3 + 39x^2 + 39x + 10 = 0$, което е реципрочно от нечетна степен $\Rightarrow$ има корен $x = -1$ и тогава $Q(x) = (x+1)(10x^2 + 29x + 10)$. Тогава $Q(x) = (x+1)(2x+5)(5x+2)$.

в) Имаме $f\left(x\right)=\dfrac{\left(2x+5\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(2x+5\right)\left(5x+2\right)}$, чието дефиниционно множество е $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{2}{5};-\dfrac{5}{2}\right\}$. Получаваме $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{5x+2}$; за производната имаме

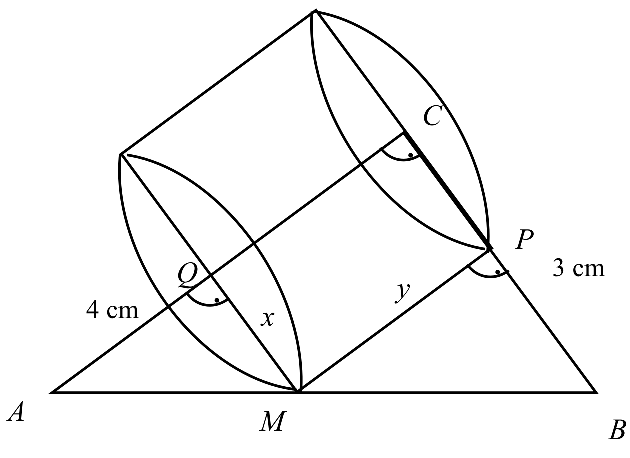
$$f'\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)'\left(5x+2\right)-\left(x-1\right)\left(5x+2\right)'}{\left(5x+2\right)^2}\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{7}{\left(5x+2\right)^2}.$$

**Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:**

| | |
|---|---|
| а) За получаване на равенствата | 2 точки |
| За получаване на коефициентите | 2 точки |
| б) За довършване разлагането на $P\left(x\right)$ | 2 точки |
| За извода, че $-1$ е нула на $Q\left(x\right)$, получаване на $Q\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(10x^2+29x+10\right)$ и довършване разлагането на $Q\left(x\right)$ | 5 точки |
| в) За ДМ и получаване на $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{5x+2}$ | 1 точка |
| За правилно получаване на производната | 3 точки |

**Задача 18.**

**Решение:**




**а)** Четириъгълникът $MPCQ$ е правоъгълник.

Означаваме $QC=MP=y$.

$V=Bh=\pi r^2h=\pi x^2y$

$PC=MQ=x$, следователно $BP=3-x$

$QC=MP=y$, следователно $AQ=4-y$

$\triangle AMQ\sim\triangle MBP$, следователно $\dfrac{AQ}{MP}=\dfrac{MQ}{BP}$

$\dfrac{4-y}{y}=\dfrac{x}{3-x}\Leftrightarrow xy=\left(4-y\right)\left(3-x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{xy}=12-4x-3y+\cancel{xy}\Leftrightarrow y=\dfrac{12-4x}{3}$

$MP=\dfrac{12-4x}{3}$ $\qquad V=\pi x^2y=\pi x^2\dfrac{12-4x}{3}=\dfrac{4\pi}{3}x^2\left(3-x\right)$ $\qquad x\in[0,3]$

**б)** Означаваме $f\left(x\right)=\frac{4\pi}{3}x^2\left(3-x\right)$

За да намерим максималния обем, трябва да намерим НГС на $f\left(x\right)$ при $x\in\left[0;3\right]$.

$f'\left(x\right)=\frac{4\pi}{3}2x\left(3-x\right)+\frac{4\pi}{3}x^2\left(-1\right)$ $\quad f'\left(x\right)=\frac{4\pi}{3}\left[2x\left(3-x\right)-x^2\right]=\frac{4\pi}{3}\left(6x-3x^2\right)$

$f'\left(x\right)=4\pi\left(2x-x^2\right)=4\pi x\left(2-x\right)$

$f\left(x\right)$ има локален максимум при $x=2$ и този локален максимум е най-голямата стойност на $f\left(x\right)$ при $x\in\left[0;3\right]$. Получава се, че $f_{\max}\left(x\right)=f\left(2\right)=\frac{16\pi}{3}$

Максималният обем на ротационното тяло е $\frac{16\pi}{3}$, който се достига при $x=2$.

**Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:**

| | |
|---|---|
| а) Полученото ротационно тяло е прав кръгов цилиндър | 1 точка |
| За $\triangle AMQ \sim \triangle MBP$ и $\frac{AQ}{MP}=\frac{MQ}{BP}$ | 5 точки |
| За получаване на $V=\frac{4\pi}{3}x^2\left(3-x\right)$ | 3 точки |
| б) Намиране на локален максимум при $x\in\left[0;3\right]$ и максималния обем на ротационното тяло $\frac{16\pi}{3}$, който се достига при $x=2$. | 6 точки |