МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. **Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими. Ако $\vec{p}=-\vec{a}+x\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$, то стойността на x, за която векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са колинеарни, е:**

   А) -3 Б) $-\frac{1}{3}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) 3

2. **В правоъгълна координатна система са дадени точките $P(2;-1)$ и $Q(-1;2)$. Дължината на вектора $\overrightarrow{PQ}$ е:**

   А) $2\sqrt{2}$ Б) $\sqrt{10}$ В) $3\sqrt{2}$ Г) $2\sqrt{5}$

3. **Ако $b_n=\dfrac{(a_n-3)(a_n+2)}{2a_n^2+3a_n-2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-2$ и $a_n \neq -2$, за всяко $n \in N$, то границата $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ е равна на:**

   А) 2 Б) -1 В) 0 Г) 1

4. **Полиномът x^3-4x^2+5x-6 се дели без остатък на двучлена:**

   А) $x-1$ Б) $x-2$ В) $x-3$ Г) $x-6$

5. **Правилна четириъгълна пресечена пирамида има основни ръбове 5 cm и 2 cm. Ако височината на пирамидата е 6 cm, то обемът ѝ е равен на:**

   А) 54 cm^3 Б) 78 cm^3 В) 102 cm^3 Г) 234 cm^3

6. **Окръжност** k **има уравнение** $x^2+y^2+2x-6y+7=0$**. Кое от посочените уравнения е уравнение на окръжност, концентрична на** k **?**

А) $(x+3)^2+(y-1)^2=7$ Б) $(x+1)^2+(y-3)^2=7$

В) $(x-1)^2+(y+3)^2=7$ Г) $(x-3)^2+(y+1)^2=7$

7. **За коя стойност на** k **функцията** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3x-1)}{6x-2}, x<\dfrac{1}{3}\\ 2k+1, x\geq\dfrac{1}{3}\end{cases}$

е непрекъсната при $x=\dfrac{1}{3}$ **?**

А) $\dfrac{1}{2}$ Б) $\dfrac{1}{4}$ В) $-\dfrac{1}{4}$ Г) $-\dfrac{1}{2}$

8. **Ако** $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$, **то декартовото уравнение на допирателната към графиката на функцията** $f(x)$ **в точката с абсциса** $x_0=-1$ **е:**

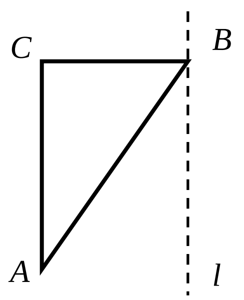
А) $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ Б) $y=-\dfrac{5\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

В) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$ Г) $y=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

9. **Функцията** $f(x)=x^3-9x^2+24x+11$ **при** $x\in\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ **е:**

А) растяща Б) намаляваща В) изпъкнала Г) вдлъбната

10. **Даден е триъгълник** ***ABC*****, за който** $AB=5$**cm,** $BC=3$ **cm и** $AC=4$**cm. Права** l **минава през точката** B **и е перпендикулярна на страната** BC**. Обемът на ротационното тяло, получено при въртене на триъгълника** ABC **около правата** l **е равен на:**



А) 12π cm^3 Б) 24π cm^3 В) 36π cm^3 Г) 48π cm^3

11. Пресечната точка на хоризонталната и вертикалната асимптота на функцията $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{3-x}$ **е с координати:**

А) $\left(3;2\right)$ Б) $\left(3;-2\right)$ В) $\left(-2;-3\right)$ Г) $\left(-2;3\right)$

12. За кои стойности на реалния параметър *m* функцията $y=-x^2-2mx+m$ **има локален максимум, равен на 2?**

А) – 2 и 1 Б) ± 1 В) 2 Г) – 1 и 2

13. Намерете границата $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-n}\right)$ **.**

А) $+\infty$ Б) 0 В) 1 Г) $\dfrac{1}{2}$

14. Времето, което се чака за преглед при личен лекар, е нормално разпределена величина със средна 9 минути и стандартно отклонение 3 минути. Вероятността случаен пациент да чака повече от 15 минути, е най-близо до:

А) 2% Б) 5% В) 25% Г) 30%

15. Дадени са три еднакви кутии, като в първата кутия има 6 **червени и** 3 **зелени бонбона, във втората –** 4 **червени и** 5 **зелени бонбона и в третата кутия има** 8 **червени и** 4 **зелени бонбона. Вероятността да се извади зелен бонбон от случайно избрана кутия, е:**

А) $\dfrac{2}{5}$ Б) $\dfrac{2}{3}$ В) $\dfrac{11}{27}$ Г) $\dfrac{9}{11}$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!

16. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 2$ е в сила равенството: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$.

17. В правоъгълна координатна система Oxy е дадена окръжност с център точка O_1 с координати $O_1(1;\ 2)$. Точка B с координати $B(5;\ -1)$ лежи на окръжността. Правата с уравнение $y = 3x + 4$ пресича окръжността в точки A и C, като точка C лежи в първи квадрант.

а) Определете координатите на точки A и C.

б) Определете скаларното произведение $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ и големината на ъгъл BCA.

18. Да се изследва функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ и да се начертае нейната графика.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	В	3
2.	В	3
3.	Г	3
4.	В	3
5.	Б	3
6.	Б	4
7.	В	4
8.	Г	4
9.	Г	4
10.	Б	4
11.	Б	4
12.	А	4
13.	Г	4
14.	А	4
15.	В	4
16.		15
17.	а) $C\,(1;\,7)$ и $A\,(-2;\,-2)$ б) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=60$ $\sphericalangle BCA=45^\circ$	15
18.		15

Задача 16.

Решение:

Доказване на равенството по индукция.

За $n = 2$ твърдението е вярно.

Нека е вярно за някое $n \geq 2$. Ще го докажем за $n + 1$. Последователно се преобразува:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\frac{(n+1)+1}{n+1}.$$

Следователно твърдението е вярно и за $n + 1$. С това индукционната стъпка е завършена. Следователно твърдението е вярно за всяко $n \geq 2$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

База на индукцията	2 точки
Индукционна стъпка	12 точки
Краен извод	1 точка

II решение

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\dots\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1+\tfrac{1}{n}\right)=($$

$$=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\dots\left(1-\tfrac{1}{n}\right).\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\dots\left(1+\tfrac{1}{n}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$$

Разлагане	2 точки
Прегрупиране и пълно съкращаване	12 точки
Краен извод	1 точка

Задача 17.

Решение:

а) Окръжността има уравнение $(x-1)^2+(y-2)^2=R^2$. Точка B е от окръжността и се замества с нейните координати $(5-1)^2+(-1-2)^2=R^2 \Rightarrow R=5$

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$. За получаване на координатите на пресечните точки се решава системата $\left|\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-2)^2=25\\ y=3x+4\end{array}\right.$ чрез заместване. $\left|\begin{array}{l}(x-1)^2+(3x+4-2)^2=25\\ y=3x+4\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}(x-1)^2+(3x+2)^2=25\\ y=3x+4\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x^2+x-2=0\\ y=3x+4\end{array}\right.$. За решение се получават двете наредени двойки (x; y), съответно (1; 7) и (–2; –2).

Тъй като точка C лежи в първи квадрант, координатите са съответно C (1; 7) и A (–2; –2)

б) I начин

$\overrightarrow{CA}(x_A-x_C;y_A-y_C)\Rightarrow\overrightarrow{CA}(-3;-9)$

$\overrightarrow{CB}(x_B-x_C;y_B-y_C)\Rightarrow\overrightarrow{CB}(4;-8)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=x_{\overrightarrow{CA}}x_{\overrightarrow{CB}}+y_{\overrightarrow{CA}}y_{\overrightarrow{CB}}\Rightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=60$

$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{x_{\overrightarrow{CA}}^2+y_{\overrightarrow{CA}}^2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}\right|=3\sqrt{10}$

$\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{x_{\overrightarrow{CB}}^2+y_{\overrightarrow{CB}}^2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CB}\right|=4\sqrt{5}$

$$\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)=\frac{60}{3\sqrt{10}.4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\Rightarrow\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)=45^\circ$$

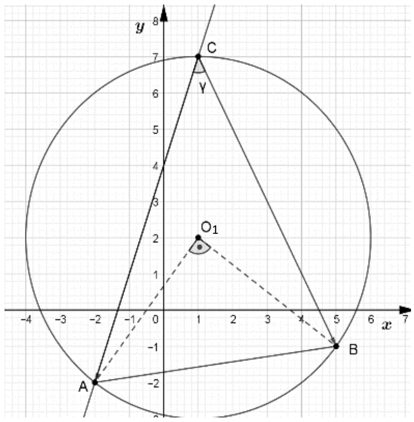
II начин

$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}\Rightarrow AC=3\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}\Rightarrow BC=4\sqrt{5}$

$$BA=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}\Rightarrow BA=5\sqrt{2}\,.$$

Начин II. 1



От обратната теорема на Питагор се получава, че ΔAO_1B е правоъгълен, където точка O_1 е център на окръжността.

От връзката между вписан и централен ъгъл

$$\sphericalangle ACB=\frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B=45^\circ$$

Начин II. 2

От косинусова теорема $\cos\sphericalangle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB}{2AC.BC}$

$$\cos\sphericalangle ACB=\frac{90+80-50}{2.3\sqrt{10}.4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sphericalangle ACB=45^\circ$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)=3\sqrt{10}.4\sqrt{5}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=60$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Определяне на R	1 точка
Съставяне и вярно решаване на подходяща система	5 точки
Определяне на координатите на A и C (вкл. уточняване на точките)	2 точки
б) **I начин** Пресмятане на скаларното произведение	3 точки
Пресмятане на косинус	3 точки
Намиране на ъгъла	1 точка
II начин Намиране на трите страни	3 точки
Доказване, че $\sphericalangle AOB=90^\circ$ или записване на косинусова теорема	2 точки
Намиране на ъгъла	1 точка
Пресмятане на скаларното произведение	1 точка

Задача 18.

Решение:

Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ е $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Функцията не е нито четна, нито нечетна $\left(f(-x)\neq\pm f(x)\right)$, нито периодична.

Изследване на функцията към краищата на дефиниционната ѝ област:

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{2x+3}{1-x}=-\infty$, следователно правата $x=1$ е вертикална асимптота при $x\to1,\ x>1$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+3}{1-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}=-2$, следователно правата $y=-2$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{2x+3}{1-x}=+\infty$, следователно правата $x=1$ е вертикална асимптота и при $x\to1,\ x<1$;

Пресмятане на производната $f'(x)=\dfrac{2(1-x)-(2x+3)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{5}{(1-x)^2}$.

Понеже $f'(x)=\dfrac{5}{(1-x)^2}>0,\ x\neq1$, то функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ е растяща във всеки интервал, в който е дефинирана.

Пресмятане на втората производна на $f(x)$ $f''(x)=\left(\dfrac{5}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{5\cdot(-2)\cdot(-1)}{(1-x)^3}=\dfrac{10}{(1-x)^3}$

Понеже $f''(x)=\dfrac{10}{(1-x)^3}>0,\ x<1$ и $f''(x)=\dfrac{10}{(1-x)^3}<0,\ x>1$, то функцията $f(x)$ е изпъкнала за $x<1$ и вдлъбната за $x>1$.

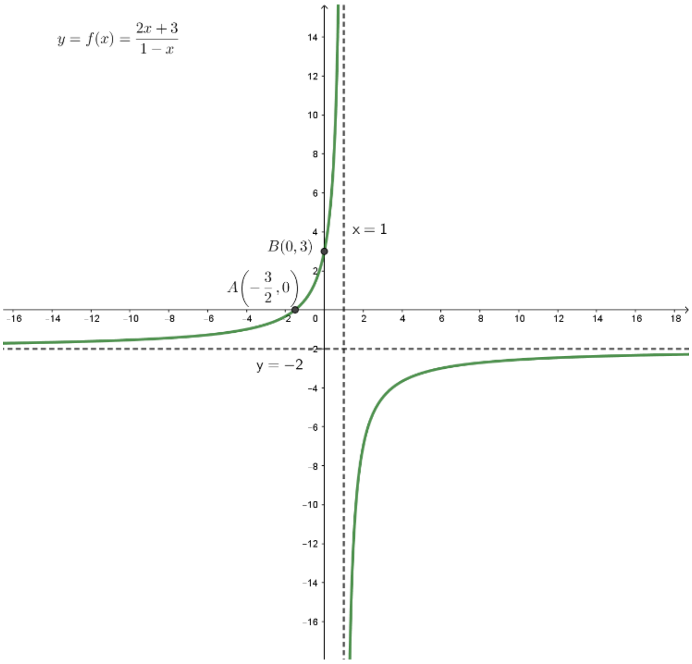
Намиране на пресечните точки с координатните оси. Оста Ox има уравнение $y=0$, следователно пресечната точка на $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ и Ox има координати $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$

Оста Oy има уравнение $x=0$, следователно пресечната точка на $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ и Oy има координати $(0;3)$.

Таблица:

<table>
<tr><td>x</td><td colspan="2">$-\infty$ 1 ∞</td></tr>
<tr><td>f</td><td>-2 $+\infty$
расте, изпъкнала</td><td>$-\infty$ -2
расте, вдлъбната</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>$+$ $+$ $+$</td><td>$+$ $+$ $+$</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>$+$ $+$ $+$</td><td>$-$ $-$ $-$</td></tr>
</table>

Графика на функцията.



Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За намиране на ДМ $x \in (-\infty,1) \cup (1,\infty)$	2 точки
За изследване на функцията в краищата на интервалите на ДМ и определяне на асимптотите	6 точки
За определяне на интервалите на растене и намаляване	2 точки
За намиране на втората производна и определяне на изпъкналост и вдлъбнатост	2 точки
За систематизиране на информацията и построяване на графиката	3 точки