МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 август 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Координатите на фокусите на елипсата, определена с уравнението $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$**, са:**

А) $F_1\left(3\sqrt{6};0\right)\ F_2\left(-3\sqrt{6};0\right)$

Б) $F_1\left(7;0\right)\ F_2\left(-7;0\right)$

В) $F_1\left(0;5\right)\ F_2\left(0;-5\right)$

Г) $F_1\left(2\sqrt{6};0\right)\ F_2\left(-2\sqrt{6};0\right)$

2. Степента на полинома $x(x+1)(x+2)\dots(x+2022)$ **е:**

А) 1 Б) 2021 В) 2022 Г) 2023

3. Намерете границата $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-5a_n+6}{a_n^2-4}$**, ако** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$ **и** $a_n \neq 2$**, за всяко** $n \in \mathbb{N}$**.**

А) 0 Б) $-\frac{1}{4}$ В) $\frac{5}{4}$ Г) $+\infty$

4. Определете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $y=-5x^3+6x^2$**.**

А) Изпъкнала за $x\in\left(-\infty;\frac{2}{5}\right)$, вдлъбната за $x\in\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$

Б) Вдлъбната за $x\in\left(-\infty;\frac{2}{5}\right)$, изпъкнала за $x\in\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$

В) Вдлъбната за $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)$, изпъкнала за $x\in\left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$

Г) Изпъкнала за $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)$, вдлъбната за $x\in\left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$

5. **Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На колко градуса е равен ъгълът, определен от правите AC и BC_1?**

А) 90° Б) 60° В) 45° Г) 0°

6. **Кои от дадените прави $a: 2x - y + 3 = 0$; $b: y = -2x + 5$; $c: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-5}{3}$ и $d: \frac{x}{-0,5} + \frac{y}{1} = 1$ са взаимно успоредни?**

А) $a \parallel b$ Б) $a \parallel c$ В) $a \parallel d$ Г) $b \parallel d$

7. **Определете скаларното произведение на векторите:**
$\vec{a} = \vec{e} + 3\vec{f}$ и $\vec{b} = -2\vec{e} + \vec{f}$, **ако** $|\vec{e}| = 2$; $|\vec{f}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{e}; \vec{f}) = 60°$.

А) -10 Б) 10 В) $-5 - 5\sqrt{3}$ Г) 0

8. **За числата** $a = \lim\limits_{x \to 4}\left(\frac{2-\sqrt{x}}{x-4}\right)$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{2+x-x^2}{2x^2+3x+1}\right)$ **и** $c = \lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{9-3x}\right)$

вярната подредба е:

А) $a < c < b$ Б) $b < a < c$ В) $b < c < a$ Г) $c < a < b$

9. **Най-голямата стойност на функцията $y = x^3 - 3x$ за $x \in [0; 2]$ е:**

А) -2 Б) 0 В) 2 Г) 3

10. **Втората производна на функцията $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$ е:**

А) $f''(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2}$

Б) $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} + \frac{2}{x^3}$

В) $f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 2x^{-3}$

Г) $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{x^3}$

11. Кои са всички стойности на параметъра *a*, за които функцията $y = \frac{ax+6}{2x-3}$ е намаляваща във всеки от интервалите на дефиниционното си множество?

А) $a < 4$ Б) $a > 4$ В) $a < -4$ Г) $a > -4$

12. В сфера е вписан куб с обем $16\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^3$. Радиусът на сферата е:

А) $2\sqrt{2}$ cm Б) $\sqrt{6}$ cm В) 4 cm Г) $2\sqrt{6}$ cm

13. Футболният екип се състои от три части – фланелка, гащета и чорапи, като двата чорапа са едноцветни. Всяка част може да бъде бяла, зелена или червена. Два екипа са различни, ако се различават в поне една от частите си. Броят на различните възможни екипи е:

А) 6 Б) 27 В) 10 Г) 9

14. Изпит съдържа 15 въпроса, всеки от които има по 4 възможни отговора, само един от които е верният. Ученик, който не се е подготвял, отговаря независимо на всеки въпрос, като избира един от отговорите по случаен начин. Математическото очакване на величината X – брой верни отговори, е:

А) $3\frac{3}{4}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $\frac{4}{15}$ Г) $2\frac{13}{16}$

15. Вероятността да вали сутрин е $\frac{2}{3}$. Ако вали, вероятността Ани да отиде пеша на училище е $\frac{1}{7}$. Ако НЕ вали, вероятността Ани да отиде пеша на училище е $\frac{4}{7}$. Намерете вероятността Ани да НЕ отиде пеша на училище.

А) $\frac{3}{7}$ Б) $\frac{4}{7}$ В) $\frac{5}{7}$ Г) $\frac{6}{7}$

ФОРМУЛИ

Вектори и координати

$\vec{a}(x_a, y_a)$ $\vec{b}(x_b, y_b)$ $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$ $|\vec{a}| = \sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2}$

$\vec{a} \pm \vec{b}(x_a \pm x_b, y_a \pm y_b)$ $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$ $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2}\sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2}}$$

$A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ – точки, $M\left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}\right)$ – среда на отсечката AB

$A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ – точки, $G\left(\frac{x_a+x_b+x_c}{3}, \frac{y_a+y_b+y_c}{3}\right)$ – медицентър на ΔABC

Аналитична геометрия в равнината

$ax + by + c = 0$ общо уравнение на права

$y = kx + b$ декартово уравнение на права

$g: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, където т. $M_1(x_1, y_1)$ и т. $M_2(x_2, y_2)$ уравнение на права през две точки

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ нормално уравнение на окръжност с център $O(a; b)$ и радиус r

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ канонично уравнение на елипса

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ канонично уравнение на хипербола

$y^2 = 2px$ канонично уравнение на парабола

Ъгъл φ между две прави g_1 и g_2

$g_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $g_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$cos\,\varphi = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2}.\sqrt{a_2{}^2 + b_2{}^2}}\right|$$

Квадратно уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ $D = b^2 - 4ac$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ при $D \geq 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Формули на Виет: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^{\ 2} = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$m_a^{\ 2} = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $m_b^{\ 2} = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ $m_c^{\ 2} = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^{\ 2} = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ Описан многоъгълник: $S = pr$

Ръбести и валчести тела

Права призма $S = Ph$ $S_1 = S + 2B$ $V = Bh$

Правилна пирамида $S = \frac{Pa}{2}$ $S_1 = S + B$ $V = \frac{1}{3}Bh$

Пресечена пирамида $S_1 = S + B + B_1$ $V = \frac{h}{3}(B + B_1 + \sqrt{BB_1})$

Прав кръгов цилиндър $S = 2\pi rh$ $S_1 = 2\pi r(h + r)$ $V = \pi r^2 h$

Прав кръгов конус $S = \pi rl$ $S_1 = S + B = \pi r(l + r)$ $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Прав кръгов пресечен конус

$S = \pi l(R + r)$; $S_1 = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$; $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

Сфера и кълбо $S = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$

Полиноми на една променлива

Теорема на Безу $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x) + P_n(x_0)$

Схема на Хорнер

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = x_0 b_0 + a_1$	$b_2 = x_0 b_1 + a_2$	$\cdots$	$b_{n-1} = x_0 b_{n-2} + a_{n-1}$	$x_0 b_{n-1} + a_n = P_n(x_0)$

Числови редици

Нютонов бином

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\binom{n}{k} = C_n^k \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$S = \dfrac{a_1}{1-q}$ Сума на безкрайна геометрична прогресия с $|q| < 1$

Граници на редици:

$$\lim_{n\to\infty} a = a \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Leftrightarrow |q| < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$$

Функции. Непрекъснатост и диференцируемост

Граници на функции:

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0$, при $k\in\mathbb{N}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ Ако $\lim_{x\to c}f(x)=0$, то $\lim_{x\to c}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin px}=\frac{k}{p}$

Производни на някои функции	Правила за диференциране
$(c)'=0, c$ – константа	$(cf(x))'=cf'(x)$
$(x)'=1$	
$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, \alpha\epsilon R$	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
$(\sin x)'=\cos x$	
$(\cos x)'=-\sin x$	$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$
$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	
$(\operatorname{cotg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(e^x)'=e^x$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$(a^x)'=a^x\ln a, a>0$	
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(g(f(x)))'=g'(f(x))f'(x)$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, a>0, a\neq 1, x>0$	

Приложения на математическия анализ

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ допирателна към графиката на функцията $y=f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$

t: $(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=R^2$ допирателна към окръжността

k: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ в точката $M_0(x_0,y_0)$

t: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ допирателна към елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точката $M_0(x_0,y_0)$

t: $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точката $M_0(x_0,y_0)$

Комбинаторика

Пермутация от n елемента $P_n = n!$

Вариации от n елемента, k-ти клас $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Комбинации от n елемента, k-ти клас $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Брой вариации с повторение от n елемента, k-ти клас $\widetilde{V_n^k} = n^k$

Брой пермутации с повторение от n елемента, k-ти клас

$\widetilde{P_n}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!.n_2!\dots n_k!}$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

Брой комбинации с повторение от n елемента, k-ти клас

$$\widetilde{C_n^k} = \widetilde{P_n}(k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

Вероятности и анализ на данни

Класическа вероятност

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{\text{брой на благоприятните изходи}}{\text{общ брой на изходите}}, 0 \le P(A) \le 1, P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

Вероятност за сума $\mathbf{P(A \cup B)}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ако A и B са несъвместими

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Условна вероятност

$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\text{сечението})}{P(\text{условието})}$, при $P(B) > 0$

Формула за пълната вероятност

$B_1, B_2, \dots, B_n$ е пълна група събития при даден опит. Тогава вероятността да настъпи случайното събитие A е:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

Формула на Бейс

за всяко $k = 1, 2, \dots, n$ е изпълнено $P(B_k|A) = \dfrac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}$

Математическо очакване, дисперсия и стандартно отклонение на дискретна случайна величина

X	x_1	x_2	…	x_k
P	p_1	p_2	…	p_k

Математическо очакване: $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k$

Дисперсия: $D(X) = \left(x_1 - E(X)\right)^2 p_1 + \left(x_2 - E(X)\right)^2 p_2 + \ldots + \left(x_k - E(X)\right)^2 p_k$

$D(X) = E(X - EX)^2$

Стандартно отклонение: $\sigma = \sqrt{D(X)}$

Биномно разпределение с параметри *n*, *p* и *q*

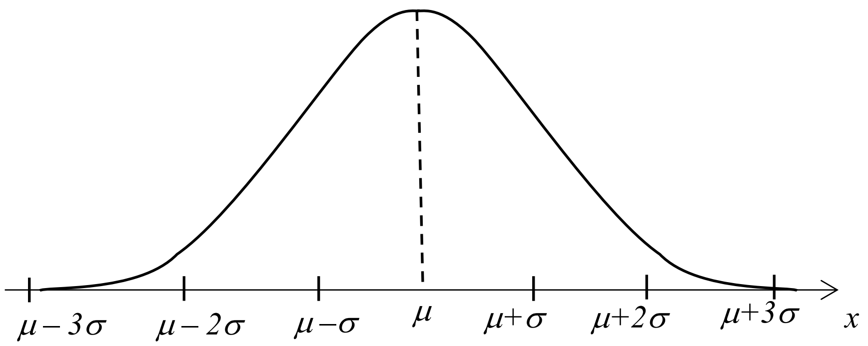
X	0	1	…	k	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

$E(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$

Нормално разпределение $N(\mu, \sigma^2)$ на случайна величина X

Функция на плътност: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ при $x \in (-\infty; +\infty)$

$E(X) = \mu$ - математическо очакване, σ - стандартно отклонение



$N(0,1)$ - стандартно нормално разпределена случайна величина Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Таблица за стойностите на стандартното нормално разпределение

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 август 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!

16. Дадена е функцията: $y = ax^3 - 3x^2 + 3a^2$ **за** $\boldsymbol{a} > 0$**.**

а) Намерете локалните екстремуми на функцията.

б) Намерете стойностите на реалния параметър $\boldsymbol{a}$**, ако сборът от локалните екстремуми на функцията е равен на 2.**

17. Даден е $\triangle ABC$**, за който** $A(1;1)$**,** $B(6;-3)$ **и** $C(10;-2)$**. Ако** $AM\,(M \in BC)$ **и** $AD\,(D \in BC)$ **са съответно медиана и височина на** $\triangle ABC$**, то да се намери:**

а) общото уравнение на правата AM **;**

б) декартовото уравнение на правата AD **;**

в) косинусът на ъгъла между медианата AM **и височината** AD **на** $\triangle ABC$**.**

18. Решете уравнението $\boldsymbol{2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0}$ **и проверете кои от решенията му са решения на неравенството** $\boldsymbol{x^2 - 6x + 5 \leq 0}$ **.**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 август 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	Г	3
2.	Г	3
3.	Б	3
4.	А	3
5.	Б	3
6.	В	4
7.	А	4
8.	В	4
9.	В	4
10.	Б	4
11.	Г	4
12.	Б	4
13.	Б	4
14.	А	4
15.	В	4
16.	а) $3a^2 - max$ $3a^2 - \frac{4}{a^2} - min$ б) $a = 1$	15
17.	а) $AM: x + 2y - 3 = 0$ б) $AD: y = -4x + 5$ в) $\cos\measuredangle MAD = \frac{6\sqrt{85}}{85}$	15
18.	$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{1}{2}$, $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2$ са решения на неравенството	15

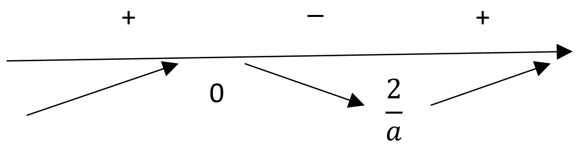
Задача 16.

Решение:

а) $y = ax^3 - 3x^2 + 3a^2$ $\qquad\qquad$ $y' = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$

Производната има корени $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2}{a}$

При $a > 0$ имаме:



$y_{max} = y(0) = 3a^2$

$y_{min} = y\left(\frac{2}{a}\right) = a\frac{8}{a^3} - 3\frac{4}{a^2} + 3a^2 = \frac{8}{a^2} - \frac{12}{a^2} + 3a^2 = -\frac{4}{a^2} + 3a^2$

б) $y_{min} + y_{max} = 2 \Rightarrow 3a^2 - \frac{4}{a^2} + 3a^2 = 2$

$6a^2 - 2 - \frac{4}{a^2} = 0 \;/.a^2 > 0$

$6a^4 - 2a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3a^4 - a^2 - 2 = 0$

Полагане $a^2 = b > 0$

Уравнението $3b^2 - b - 2 = 0$ има корени $b_1 = -\frac{2}{3} < 0$ не е решение и $b_2 = 1$

Тогава $a^2 = b = 1$ и $a = \pm 1$, $a > 0$

Отговор: $a = 1$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране на производната; разлагане и нулиране при $a > 0$	3 точки
Нанасяне на числовата ос; определяне на знаците; локалните екстремуми и интервалите на растене и намаляване	3 точки
Пресмятане на локалните екстремуми	2 точки
б) Съставяне и решаване на зададеното уравнение. Определяне на ДС	5 точки
Отхвърляне на грешните и определяне на отговора $a = 1$.	2 точки

Задача 17.

Решение:

а) AM – медиана, следователно т. M е среда на страната BC. Намиране координатите на $M\left(\frac{6+10}{2};\frac{-3-2}{2}\right)$, т.е. $M\left(8;-\frac{5}{2}\right)$.

Намиране уравнението на правата AM през две точки:

$$\frac{x-1}{8-1}=\frac{y-1}{-\frac{5}{2}-1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}=7y-7\Leftrightarrow -7x+7=14y-14\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -7x-14y+21=0\Leftrightarrow x+2y-3=0$. Така се получава $AM: x+2y-3=0$

б) Намиране декартовото уравнение на правата, на която лежи страната BC:

$$\frac{x-6}{10-6}=\frac{y+3}{-2+3}\Leftrightarrow\frac{x-6}{4}=\frac{y+3}{1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-6=4y+12\Leftrightarrow x-4y-18=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{9}{2}$$

$AD\perp BC$ следователно $AD: y=-4x+b$.

Използване, че $A\in AD$, за да се намери коефициента b в декартовото уравнение, т.е. $1=-4.1+b$, откъдето $b=5$.

$AD: y=-4x+5$

в) Намиране колинеарни вектори с правите AM и AD, например $\vec{a}(-2;1)$ и $\vec{b}(-1;4)$.

$$\measuredangle(AM;AD)=\measuredangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$$

Използване скаларното произведение:

$$\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\measuredangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$$

$$\cos\measuredangle MAD=\cos\measuredangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=-2.(-1)+1.4=6$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$$

$$\cos\measuredangle MAD=\frac{2+4}{\sqrt{5}.\sqrt{17}}=\frac{6}{\sqrt{85}}=\frac{6\sqrt{85}}{85}$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране координатите на M и общото уравнение на правата AM	3 точки
б) Намиране декартовото уравнение на правата AD	4 точки
в) Намиране колинеарни вектори с правите AM и AD или техни нормални вектори	3 точки
Използване скаларното произведение $\vec{a}.\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\measuredangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ и намиране на $\lvert\vec{a}\rvert$ и $\lvert\vec{b}\rvert$	3 точки
Намиране на $\cos\measuredangle MAD$	2 точки

Забележка: за в) При вярно намиране чрез ъгловите коефициент на правите на $tg\measuredangle MAD$ и оттам на $\cos\measuredangle MAD$ – 8 точки.

Задача 18.

Решение:

$2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0\ /:\ x^2 \neq 0$

$2x^2 - 13x + 24 - \frac{13}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$

Полагане: $x + \frac{1}{x} = z$ и изразяване: $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$.

Получаване: $2(z^2 - 2) - 13z + 24 = 0$

$2z^2 - 13z + 20 = 0 \quad D = 169 - 4.40 = 9$

$z_{1;2} = \frac{13 \pm 3}{2}\ ;\ z_1 = 4\ ;\ z_2 = \frac{5}{2}$

След заместване:

$x + \frac{1}{x} = 4$ при $x \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$D = 16 - 4 = 12 \qquad x_{1;2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ при $x \neq 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

D = 25 – 16 = 9 $\qquad x_{3;4} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2$ и $\frac{1}{2}$

За неравенството $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ имаме: $x_{1,2} = 1$ и 5

Решението му е между корените $\Rightarrow x \in [1; 5]$.

От $x_1 = 2 - \sqrt{3} < 1$; $x_2 = 2 + \sqrt{3} \in [1; 5]$

$x_3 = \frac{1}{2} < 1$ и $x_4 = 2 \in [1; 5]$ Отговор: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Определяне, че уравнението е реципрочно /$x \neq 0$/, деление на $x^2 \neq 0$, групиране по коефициенти	2 точки
Полагане на $x + \frac{1}{x} = z$; определяне на $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$; заместване	3 точки
Решаване на уравнението $2z^2 - 13z + 20 = 0$ и определяне на $z_1 = 4$; $z_2 = \frac{5}{2}$	2 точки
Заместване и решаване на уравненията $x + \frac{1}{x} = 4$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$. Определяне на $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = 2$ и $\frac{1}{2}$	4 точки
Решаване на неравенството $x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \in [1; 5]$ Определяне на корените, които са решения на неравенството	3 точки
Определяне на решенията на задачата $x = 2 + \sqrt{3}$; $x = 2 \in [1; 5]$	1 точка

Забележка: Решенията на уравнението могат да се определят и по схемата на Хорнер.