

I кръг
Ученици от 11 - 12 клас – решения

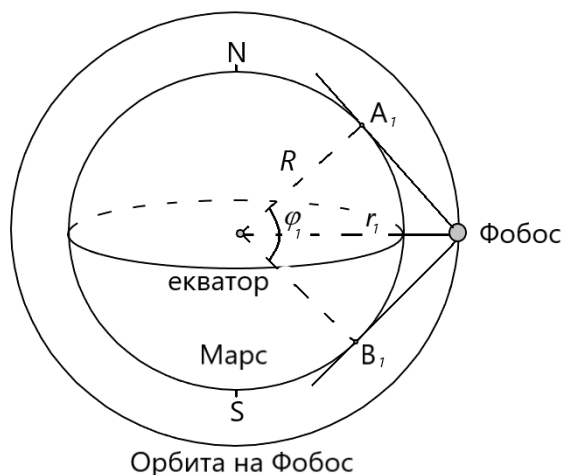
1 задача. Червената планета. Въпреки десетките космически мисии, изпратени до Марс, досега ние не сме се срещали с обитателите на тази планета. Всъщност марсианците са много потайни и необщителни. Те не обичат да напускат своите секретни градове. Делят се на три групи. Едните са убедени, че Марс има два естествени спътника. Другите смятат, че има само един спътник, а третите не вярват въобще планетата им да има някакви спътници.

• Определете приблизително в кои области от Марс живеят трите групи марсианци. Намерете необходимите числени данни и приемете, че Фобос и Деймос се движат по кръгови екваториални орбити около планетата.

Решение:

Причината за разминаването в убежденията на консервативните марсианци относно броя на техните спътници е в това, че не навсякъде по марсианската повърхност Фобос и Деймос могат да се появяват над хоризонта.

Радиусът на Марс е $R = 3389.5$ km. Радиусът на орбитата на Фобос е $r_1 = 9376$ km.



Както се вижда от фигурата, най-северната точка от марсианската повърхност, за която Фобос може да се наблюдава в даден момент, е точката A_1 с планетографска ширина φ_1 , а най-южната – точка B_1 , със същата по стойност ширина, но в южното полукълбо на планетата.

$$\cos \varphi_1 = \frac{R}{r_1}$$
$$\varphi_1 \approx 68.8^\circ$$

Радиусът на орбитата на Деймос е $r_2 = 23458$ km. По аналогичен начин за максималната планетографска ширина, от която този спътник може да бъде видян, получаваме:

$$\cos \varphi_2 = \frac{R}{r_2}$$

$$\varphi_2 \approx 81.7^\circ$$

Оттук заключаваме, че марсианците, които знаят, че планетата им има два спътника, живеят в областта между паралелите с 68.8° северна и 68.8° южна планетографска ширина. Те виждат над хоризонта както Фобос, така и Деймос. Онези, които мислят, че Марс има само един спътник, живеят в ивиците между 68.8° и 81.7° северна ширина и между 68.8° и 81.7° южна ширина. Те могат да видят само Деймос, но не и Фобос. Жителите на Марс, които са убедени, че планетата им няма спътници, живеят в малките области около северния и южния полюс на Марс, ограничени от паралелите с 81.7° северна и южна ширина.

Следва да се уточни, че границите на описаните области са приблизителни, понеже не се отчита обстоятелството, че видимостта на даден спътник може да се повлияе от релефа на съответната местност, специфичните особености на формата на планетата и евентуално съществуващата, макар и нищожна рефракция в разредената марсианска атмосфера.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За правилен алгебричен метод за определяне на максималната планетографска ширина, от която може да се види един спътник – 4 т.

За пресмятане на ширините на границите на видимост на Фобос и Деймос – 2 т.

За описание на зоните, в които живеят трите групи марсианци – 4 т.

2 задача. Посидоний. Древногръцкият учен Посидоний е живял през II - I век пр.н.е. След като дълго е пътешествал и събирал знания, той се заселил на остров Родос, където открил своя философска школа. Там е направил опит да определи радиуса на земното кълбо по свой метод. Според Посидоний звездата Канопус се издига на максимална височина $1/48$ част от пълната окръжност в град Александрия, а на остров Родос едва се показва над хоризонта. Разстоянието между наблюдателния пункт на остров Родос и Александрия е било 5000 стадия. Посидоний е смятал, че тези два пункта се намират на един и същи меридиан.

- А) Определете радиуса на земното кълбо в стадии по метода на Посидоний.
- Б) Ератостен, а след това и Посидоний, са оценили приблизително размерите на Луната и разстоянието от Земята до Луната. Опишете как би могло да стане това чрез измерване на времеви интервали и ъглови величини по небето и чрез наблюдение на централно пълно лунно затъмнение.

Решение:

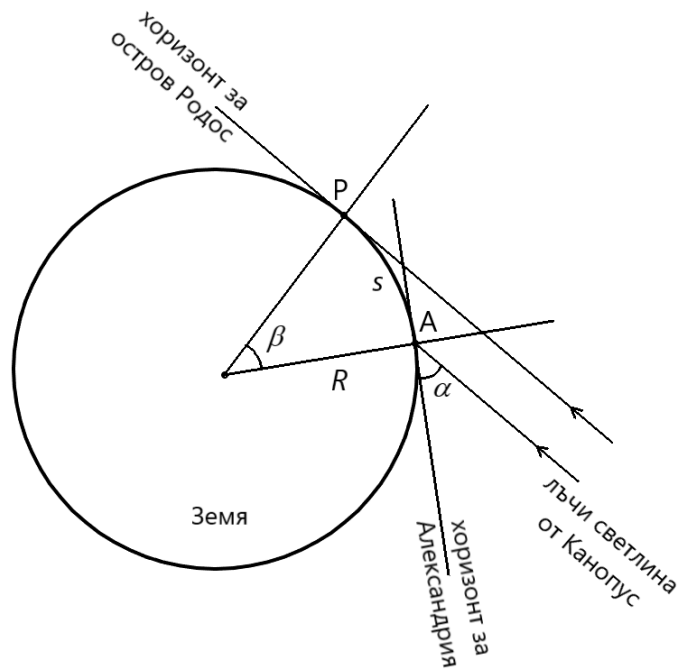
На дадената схема с точка А е означен град Александрия, а с точка Р – наблюдателният пункт на Посидоний на остров Родос. Максималната височина на звездата Канопус над хоризонта за Александрия е

$$\alpha = \frac{1}{48} \cdot 360^\circ = 7.5^\circ$$

В същия момент звездата Канопус е на самия хоризонт за остров Родос. От схемата се вижда, че при това положение ъглите α и β са равни (ъгли с взаимно перпендикулярни рамене). На централния ъгъл β съответства дъгата $s = 5000$ стадия, която е равна на разстоянието между Родос и Александрия. Радиуса R на земното кълбо можем да получим от пропорцията:

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\beta}{360^\circ}$$

$$R = \frac{180^\circ \cdot s}{\pi\beta} \approx 38197 \text{ стадия}$$



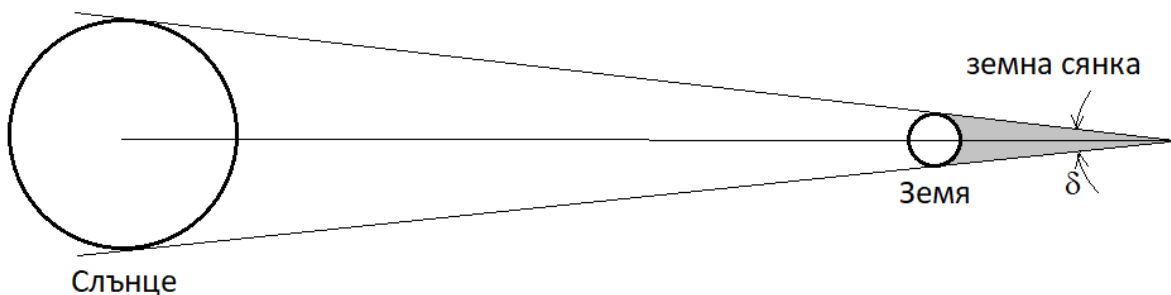
При наблюдение на централно пълно лунно затъмнение може да се измери времето t , за което определена точка от видимия лунен диск (например най-източната точка) прекосява диаметъра на земната сянка. След това, като се знае синодичният лунен месец T_{SYN} , може да се намери видимият ъглов диаметър на земната сянка:

$$\delta_0 = 360^\circ \cdot \frac{t}{T_{SYN}}$$

Видимият ъглов диаметър на Луната δ_L може да се измери пряко чрез наблюдение. При сравняване на двете величини може да се прецени, че диаметърът на Луната е около два и половина пъти по-малък от диаметъра на земната сянка. Оттук може да се направи заключението, че Луната по диаметър е около два и половина пъти по-малка от Земята и като се знаят вече размерите на земното кълбо, могат да се пресметнат размерите на Луната. Разбира се, тази оценка би била доста приблизителна, понеже не се отчита стеснението на конуса на земната сянка с отдалечаване от Земята. По-нататък, като се намери по гореописания начин линейният диаметър D_L на Луната, може да се пресметне разстоянието до нея:

$$r_0 = \frac{360^\circ}{\delta_L} \cdot D_L$$

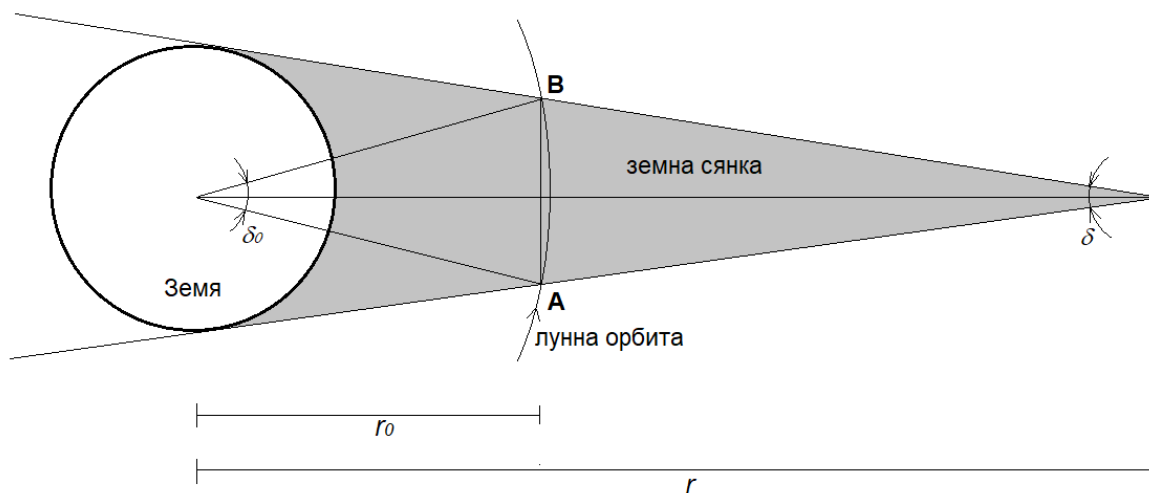
При по-внимателно разглеждане би могло да се оцени приблизително и стеснението на конуса на земната сянка.



Тъй като Слънцето е много по-голямо от Земята, можем да приемем, че ъгълът δ при върха на конуса на земната сянка е приблизително равен на видимия ъглов диаметър на Слънцето за наблюдател от повърхността на Земята. Но известно е, например от наблюдения на пълните слънчеви затъмнения, че видимият ъглов диаметър на Слънцето е равен на видимия ъглов диаметър на Луната. Следователно:

$$\delta = \delta_L$$

На следващата схема е показан конусът на земната сянка и част от лунната орбита, която минава през него. Вече обяснихме, как би могъл да се определи видимият ъглов диаметър на земната сянка δ_0 при наблюдение на лунно затъмнение. Линейния диаметър АВ на земната сянка означаваме с d . Разстоянието от Земята до Луната е r_0 , а разстоянието от Земята до върха на конуса на земната сянка е r .



Тъй като ъглите δ_0 и δ_L са малки, то можем да напишем следните приблизителни съотношения:

$$AB = d = \delta_0 r_0 = \delta_L (r - r_0)$$

Тук ъглите са изразени в радиани. Като знаем вече земния радиус R , можем да намерим разстоянието от Земята до върха на конуса на земната сянка:

$$r = \frac{2R}{\delta_L}$$

Така за разстоянието от Земята до Луната получаваме:

$$r_0 = \frac{2R}{\delta_0 + \delta_L}$$

Диаметърът на земната сянка ще бъде:

$$d = \frac{2R\delta_0}{\delta_0 + \delta_L}$$

По-нататък, както вече описахме, чрез сравняване на видимите ъглови диаметри на земната сянка и на Луната може да се намери линейният диаметър на Луната.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

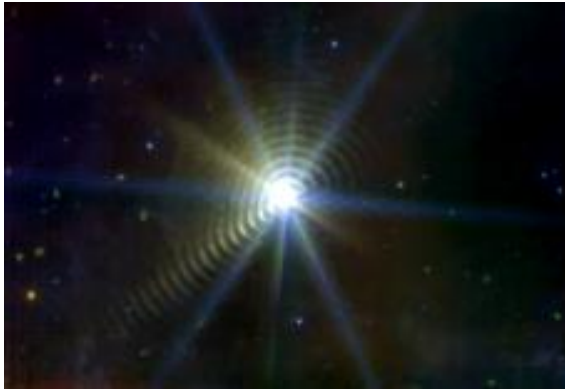
За правилна геометрична постановка на метода за пресмятане на радиуса на Земята по метода на Посидоний – 5 т.

За алгебрично пресмятане и краен числен резултат – 2 т.

За описание на метод за намиране на размерите на Луната и разстоянието до нея – 3 т. (Ако е описан метод без отчитане на стеснението на земната сянка – 2 т.).

3 задача. WR140. Звездата WR140 отдавна предизвиква интереса на астрономите, като принос към нейното изследване има и българският астроном Кирил Панов. Тя е от

типа Волф-Райе – масивна, гореща и с изключително висока светимост. Намира се на 5600 светлинни години от нас и принадлежи към двойна система с още една също гореща масивна звезда. Двете звезди се движат около общия си център на масите по силно изтеглени елиптични орбити с период 7.924 години. Във външните слоеве на WR140 се изхвърля голямо количество прахови частици, богати на въглерод. Те се ускоряват от светлинното налягане, породено от лъчението на звездата. Всеки път, когато двете звезди се сближат на минимално разстояние по своите орбити, праховите частици от WR140 взаимодействат с мощния звезден вятър на другата компонента. Така се образува вплътнена прахова обвивка, която се разширява с голяма скорост. Това се повтаря след всеки нов орбитален период при следващото максимално сближаване на звездите.



Неотдавна от космическия телескоп James Webb беше получено удивително изображение на звездата. На него се вижда голяма поредица от последователно изхвърлени прахови обвивки, заобикалящи звездната система. Ъгловият размер на дългата страна на изображението е 110 дъгови секунди.

- Направете необходимите измервания и оценете скоростта на разширяване на праховите обвивки. Използвайте негативното изображение след условията на задачите.

Решение:

Измерваме дългата страна на изображението и тя се оказва равна на 217 mm. Това ще ни помогне да определим мащаба на изображението в дъгови секунди. След това трябва да определим разстоянието между две съседни прахови ивици, изхвърлени от двойната звездна система. Прякото измерване няма да ни даде резултат с добра точност, понеже разстоянието между ивиците е малко и те имат доста размити граници. По-добре е да измерим сумарната ширина на по-голям брой ивици и да я разделим на този брой. За целта избираме примерно един участък от 15 ясно изобразени последователни ивици по един от по-ярко очертаните „лъчи“ върху изображението. Общата дължина на този участък е 70 mm. Следователно за разстоянието между две съседни ивици получаваме:

$$d = 70 \text{ mm} : 15 \approx 4.67 \text{ mm}$$

Като използваме мащаба на изображението, намираме видимото ъглово разстояние между две съседни ивици:

$$\delta = d \cdot \frac{110''}{217 \text{ mm}} \approx 2.37''$$

Сега можем да използваме даденото ни разстояние до двойната звездна система $r = 5600$ светлинни години, за да определим линейното разстояние между две съседни прахови ивици:

$$D = \frac{\delta''}{360^\circ \cdot 60' \cdot 60''} \cdot 2\pi r \approx 0.0643 \text{ ly}$$

Разстоянието между две съседни прахови ивици е 0.0643 светлинни години. Както е обяснено в условието, при всяко сближение на двете звезди при движението им по техните елиптични орбити се получава вплътняване на изхвърлените прахови частици. Следователно времевият интервал между изхвърлянето на всеки две последователни плътни прахови ивици е равен на орбиталния период на системата T . Това означава, че изхвърленото вещество изминава за време T разстоянието между съседните ивици D . Оттук можем да намерим скоростта на разширение на праховите ивици:

$$V = \frac{D}{T}$$

На пръв поглед, за да пресметнем тази скорост, трябва да изразим разстоянието D в километри, а периода T в секунди. Но можем да си спестим значителни изчисления, ако използваме следното съотношение:

$$\frac{V}{c} = \frac{D[\text{светлинни години}]}{T[\text{години}]}$$

където $c = 300000 \text{ km/s}$ е скоростта на светлината. Оттук намираме:

$$V = \frac{0.0643 \text{ ly}}{7.924 \text{ год.}} \cdot 300000 \text{ km/s}$$

$$V \approx 2400 \text{ km/s}$$

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За измервания с цел определяне на мащаба на изображението – 2 т.

За измерване на разстоянието между две прахови ивици – 3 т. (При пряко измерване на разстоянието между две съседни прахови ивици – 1 т.)

За пресмятане на линейното разстояние между две съседни прахови ивици – 2 т.

За определяне на скоростта на разширение на праховите ивици – 3 т.

4 задача. Мисията DART. Мисията DART имаше за цел да се изпробва метод за защита на Земята от опасни астероиди. На 26 септември 2022 г. беше осъществен сблъсък на космическия апарат DART с астероида Диморфос – малък спътник на астероида Дидимос. Целта беше да се промени орбитата на Диморфос около Дидимос. При сблъсъка космическият апарат DART се е движил в посока противоположна на посоката на орбитално движение на Диморфос около Дидимос.

- **А)** Като използвате дадените ви справочни данни, пресметнете с колко се е променила голямата полуос на орбитата на спътника Диморфос около Дидимос в резултат от сблъсъка. Първоначалната орбита на спътника е била почти кръгова.

- **Б)** Намерете с колко се е променила пълната механична енергия на спътника Диморфос в резултат от сблъсъка.

- **В)** Определете каква част от кинетичната енергия на космическия апарат е била изразходвана за промяна на енергията на Диморфос. Проучете информацията за мисията и направете предположение за какво е била изразходвана останалата част от енергията на космическия апарат.

Маса на Дидимос – $523.2 \times 10^9 \text{ kg}$; маса на Диморфос – $4.8 \times 10^9 \text{ kg}$

Радиус на орбитата на Диморфос преди сблъсъка – 1.19 km

Орбитален период на Диморфос преди сблъсъка – $11\text{h}55\text{m}18\text{s}$; след сблъсъка $11\text{h}23\text{m}$

Маса на космическия апарат при сблъсъка 500 kg , скорост 6.6 km/s

Пълната механична енергия на тяло с маса M при движение по орбита с голяма полуос a около тяло с маса M_0 е:

$$E = -\frac{GM M_0}{2a}$$

Решение:

Нека r е радиусът на първоначалната орбита на астероида, а T_0 и T са неговият първоначален орбитален период и орбиталният му период след сблъсъка с космическата станция. Означаваме с a голямата полуос на орбитата на астероида след сблъсъка. Съгласно третия закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T_0^2} = \frac{a^3}{T^2}$$

Оттук получаваме:

$$a = r \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_0^2}}$$

$$a \approx 1.154 \text{ km}$$

Промяната на голямата полуос на орбитата на астероида е:

$$a - r = -36 \text{ m}$$

След сблъсък с космическия апарат DART астероидът Диморфос е започнал да се движи по орбита с голяма полуос, която е с 36 метра по-малка от радиуса на първоначалната му орбита.

Означаваме с M_0 и M масите на Дидимос и Диморфос. Промяната на пълната механична енергия на спътника Диморфос е:

$$\Delta E = -\frac{GM_0M}{2a} - \left(-\frac{GM_0M}{2r}\right)$$

$$\Delta E = \frac{GM_0M}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \approx -2.2 \times 10^6 \text{ J}$$

В резултат от сблъсъка пълната механична енергия на Диморфос е намаляла с около 2.2 милиона джаула.

Ако означим с m и v масата и скоростта на космическия апарат, то неговата кинетична енергия в момента на сблъсъка е била:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_k \approx 10.9 \times 10^9 \text{ J}$$

Можем да пресметнем, че промяната на пълната механична енергия на астероида спътник е само около 0.0002 части от кинетичната енергия на космическия апарат. При това в резултат от сблъсъка астероидът не е получил, а е изгубил част от своята пълна механична енергия. Практически цялата кинетична енергия на станцията DART, заедно с незначителната енергия, изгубена от астероида спътник, е била изразходвана за експлозията и разпръскването на отломците от двата обекта при техния сблъсък. Просветванията от взрива и облаците от изхвърлени частици са били наблюдавани с космическите телескопи Хъбъл и Джеймс Уеб, както и с други наземни телескопи и космически станции.

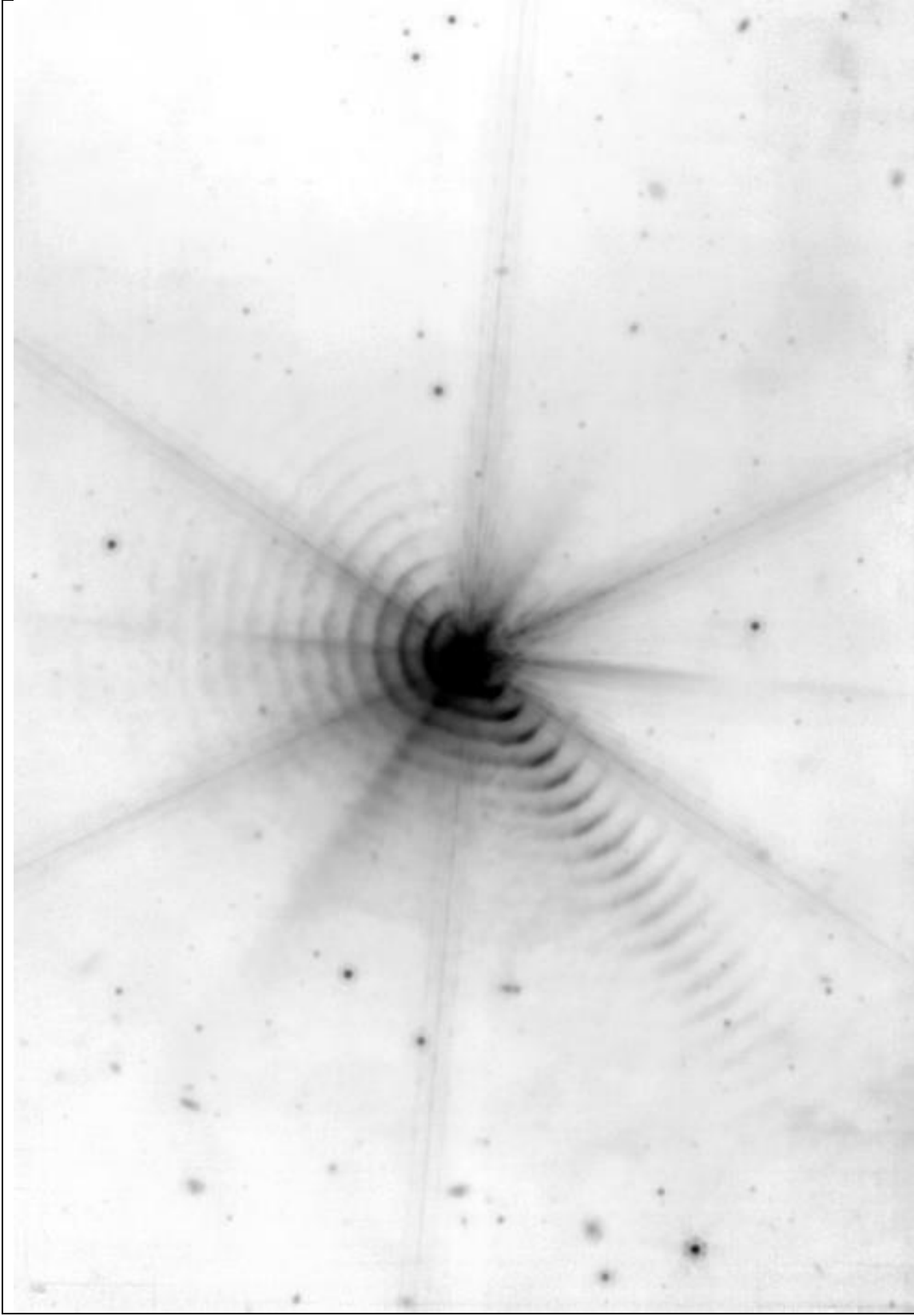
Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За определяне на голямата полуос на новата орбита на Диморфос – 3 т.

За намиране на промяната на пълната механична енергия на спътника – 2 т.

За определяне на кинетичната енергия на станцията – 2 т.

За обяснение на промяната и разхода на енергия на двата обекта – 3 т.



Звезда WR140, фотографирана от телескопа James Webb – негативно изображение