

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

25 август 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Определете кои от дадените прави са взаимно перпендикулярни:

$$a: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, b: y = -\frac{1}{2}x + 1, c: y = 2x - 1, d: y = -2x + 2.$$

А) $a \perp c$ и $b \perp d$

Б) $a \perp d$ и $b \perp c$

В) само $b \perp c$

Г) само $b \perp d$

2. Векторите \vec{a} и \vec{b} са линейно независими. Ако $\vec{p} = 4\vec{a} - \lambda\vec{b}$ и $\vec{q} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, то стойността на λ , за която векторите \vec{p} и \vec{q} са линейно зависими е:

А) $-\frac{4}{3}$

Б) $-\frac{3}{4}$

В) $\frac{8}{3}$

Г) $-\frac{3}{8}$

3. Числото $3745_{(8)}$, записано в осмична бройна система, в десетична бройна система е равно на:

А) 2021

Б) 2023

В) 2025

Г) 2027

4. Локалният максимум на функцията $y(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{3}{4}$ е равен на:

А) $y_{\max} = 0$

Б) $y_{\max} = \frac{1}{2}$

В) $y_{\max} = \frac{3}{4}$

Г) $y_{\max} = 1$

5. Дадени са пет тела: четири еднакви правилни зара със съответно 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точки върху стените им и един правилен тетраедър със съответно 1, 2, 3 и 4 точки върху стените му. Избираме едно от телата, хвърляме го и се падат 3 точки. Каква е вероятността да сме избрали зар?

- А) $\frac{1}{20}$ Б) $\frac{2}{15}$ В) $\frac{8}{11}$ Г) $\frac{11}{60}$

6. Правоъгълник с дължина на едната му страна 4 см и диагонал с дължина $\sqrt{41}$ см се завърта около по-голямата си страна на 360° . Пълната повърхнина на полученото ротационно тяло е равна на:

- А) 40π см² Б) 72π см² В) 80π см² Г) 90π см²

7. В правоъгълна координатна система е дадена окръжност с център точката $O_1(1;1)$. Какъв трябва да бъде радиусът на тази окръжност, така че тя да се допира до правата $g: 3x + 4y + 8 = 0$?

- А) 2 Б) $\frac{5}{2}$ В) 3 Г) 4

8. Сборът от коефициентите в нормалния вид на полинома

$$P(x) = (x^3 - 3x^2 - 4x + 5)^3 + (x - 3)^2 \text{ е:}$$

- А) 141 Б) 136 В) 5 Г) 3

9. Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

- А) $-\infty$ Б) $+\infty$ В) 0 Г) $\frac{1}{4}$

10. Намерете сумата на безкрайната геометрична прогресия

$$8, -4\sqrt{2}, 4, -2\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$

- А) $16 - 8\sqrt{2}$ Б) $16 + 8\sqrt{2}$ В) $8\sqrt{2} - 8$ Г) $-8\sqrt{2} - 8$

11. Втората производна на функцията $y(x) = \sin(\ln x)$ е:

A) $y'' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

Б) $y'' = \frac{\cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{x^2}$

В) $y'' = -\frac{\cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{x^2}$

Г) $y'' = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2}$

12. Правилна триъгълна пресечена пирамида има основни ръбове 6 cm и

4 cm, и апотемата $\frac{\sqrt{93}}{3}$ cm. Обемът на пирамидата е равен на:

A) $\frac{19\sqrt{30}}{3} \text{ cm}^3$ Б) $\frac{19\sqrt{31}}{3} \text{ cm}^3$ В) $\frac{76\sqrt{10}}{3} \text{ cm}^3$ Г) $\frac{190\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

13. Инфлексните точки на функцията $f(x) = \frac{2}{1+2x^2}$ са:

A) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{3}{2}\right)$

Б) $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{3}{2}\right)$

В) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; 3\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{3}{2}\right)$

Г) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{1}{2}\right)$

14. Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \frac{8}{x-5}$ в точката с

абсциса $x = 3$ има общо уравнение:

A) $x + 2y + 5 = 0$

Б) $2x + y - 2 = 0$

В) $x + 2y - 10 = 0$

Г) $2x - y - 10 = 0$

15. Математическото очакване на една нормално разпределена случайна величина X е 400 , а стандартното отклонение 36 . Тогава интервалът около математическото очакване, в който случайната величина X попада с вероятност 95% , е:

A) [328;472]

Б) [364;436]

В) [292;508]

Г) [388;412]

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

25 август 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!

16. В правоъгълна координатна система е построен ромб $ABCD$ със страна 5 мерни единици. Точка B е с координати $(4;2)$, а върховете A и C лежат на права с уравнение $y = 2x - 1$, като C лежи в I квадрант.

а) Определете координатите на точки A , C и D .

б) Точка M лежи на отсечката AC и я дели в отношение $AM : MC = 1 : 3$.

Определете скаларното произведение $\overline{MD} \cdot \overline{MC}$ и големината на $\angle DMC$.

17.

а) Ако $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - 5x + 4}{8x^2 + 2x}$, $b = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12 - 6x}{2(\sqrt{x+2} - 2)}$, $c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{\sin \frac{x}{2}}$ и

$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 4x - 4}{4x \sin x}$, то намерете числата a , b , c и d .

б) Да се реши неравенството $\frac{3}{4}x^3 - 9x^2 + 12x + 6 > 0$.

в) Кои от числата a , b , c и d са решение на неравенството? Обосновете отговора си.

18. В права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ долната основа е $\triangle ABC$, в който

$\angle ACB = 90^\circ$ и $\sin \angle ABC = \frac{1}{3}$. Точката M е среда на ръба AB , като

$C_1M = 6$ cm.

- а) Да се изрази обемът на призмата като функция на височината h .**
- б) Да се намери при каква стойност на височината h обемът на призмата е най-голям и да се намери този обем.**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

25 август 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	Б	3
2.	В	3
3.	А	3
4.	В	3
5.	В	3
6.	Б	4
7.	В	4
8.	Г	4
9.	Г	4
10.	А	4
11.	В	4
12.	А	4
13.	А	4
14.	Б	4
15.	А	4
16.	а) $A(0;-1)$, $C(4;7)$ и $D(0;4)$ б) $\overline{MD} \cdot \overline{MC} = 15$, $\sphericalangle DMC = 45^\circ$	15
17.	а) $a = \frac{3}{4}$, $b = -12$, $c = 8$ и $d = -8$ б) $x \in (5 - \sqrt{29}; 2) \cup (5 + \sqrt{29}; +\infty)$ в) само a е решение	15

18.	<p>а) $V(h) = \frac{4\sqrt{2}}{9}(36 - h^2)h, h \in (0; 6)$</p> <p>б) $V = \frac{64\sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3$ при $h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$</p>	15
-----	---	----

Задача 16.

Решение:

а) Точки A и C може да се разглеждат като пресечни точки на правата AC и окръжност с център точка B и радиус 5. Окръжността е с уравнение $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$. За получаване на координатите на пресечните точки се решава

системата $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ чрез заместване

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (2x-1-2)^2 = 25 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (2x-3)^2 = 25 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}. \text{ За решение се получават двете наредени двойки } (x; y), \text{ съответно } (0; -1)$$

и $(4; 7)$. Следователно координатите са съответно $A(0; -1)$ и $C(4; 7)$. Определянето на координатите на точка D следва от това, че AC и BD имат обща среда точка K . От

средата на $AC \Rightarrow K\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \Rightarrow K(2; 3)$. От средата на $BD \Rightarrow$

$$K\left(\frac{x_D + 4}{2}; \frac{y_D + 2}{2}\right) \Rightarrow D(0; 4).$$

б) Определяне на координатите на векторите

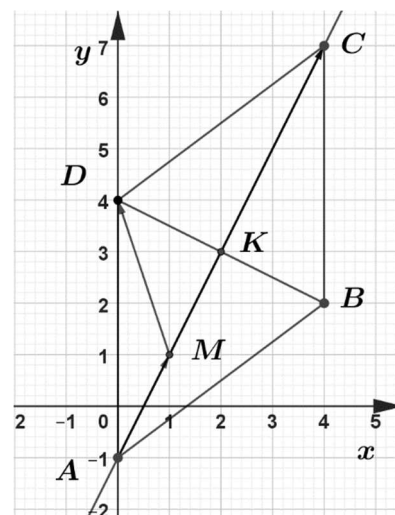
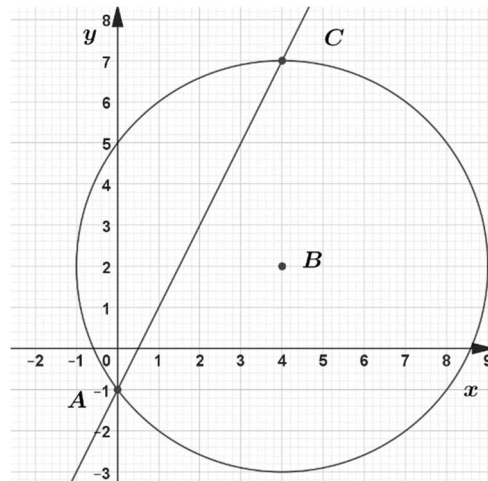
$$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(4; 8)$$

$$\overrightarrow{AM}(x_M - 0; y_M + 1), \quad \text{но} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM}(1; 2)$$

$$\Rightarrow M(1; 1)$$

$$\overrightarrow{MD}(-1; 3), \quad \overrightarrow{MC}(3; 6)$$

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = x_{\overrightarrow{MD}} x_{\overrightarrow{MC}} + y_{\overrightarrow{MD}} y_{\overrightarrow{MC}} \Rightarrow \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = 15$$



$$|\overline{MD}| = \sqrt{x_{MD}^2 + y_{MD}^2} \Rightarrow |\overline{MD}| = \sqrt{10}, \text{ аналогично}$$

$$\Rightarrow |\overline{MC}| = 3\sqrt{5}$$

$$\cos \sphericalangle (\overline{MD}, \overline{MC}) = \frac{\overline{MD} \cdot \overline{MC}}{|\overline{MD}| \cdot |\overline{MC}|}$$

$$\cos \sphericalangle (\overline{MD}, \overline{MC}) = \frac{15}{3\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sphericalangle DMC = 45^\circ$$

II начин

Пресмятане на дължините на отсечките $AC = 4\sqrt{5}$, $BD = 2\sqrt{5}$, $MK = \frac{1}{4}AC = \sqrt{5}$,

$DK = \frac{1}{2}BD = \sqrt{5}$, следователно $\triangle KMD$ е равнобедрен и правоъгълен $\Rightarrow \sphericalangle DMC = 45^\circ$.

Пресмятане на дължините $|\overline{MD}| = \sqrt{10}$ и $|\overline{MC}| = 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \overline{MD} \cdot \overline{MC} = |\overline{MD}| \cdot |\overline{MC}| \cos \sphericalangle (\overline{MD}, \overline{MC}) \Rightarrow \overline{MD} \cdot \overline{MC} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15.$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $A(0; -1)$, $C(4; 7)$ и $D(0; 4)$	8 точки
б) $\overline{MD} \cdot \overline{MC} = 15$, $\sphericalangle DMC = 45^\circ$	7 точки

Задача 17.

Решение:

$$\text{а) } a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - 5x + 4}{8x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(6 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(8 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12 - 6x}{2(\sqrt{x+2} - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(2-x)(\sqrt{x+2} + 2)}{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(2-x)(\sqrt{x+2} + 2)}{x+2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(\cancel{x-2})(\sqrt{x+2} + 2)}{\cancel{x-2}} = -3 \cdot 4 = -12$$

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \frac{x}{2} \cdot 2x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\frac{x}{2}} = 8$$

$$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 4x - 4}{4x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4(1 - \cos 4x)}{4x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cdot 2 \cdot \sin^2 2x}{4x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cdot 2 \cdot \sin^2 2x \cdot 2x \cdot 2x}{4x \sin x \cdot 2x \cdot 2x} = -8$$

б) $\frac{3}{4}x^3 - 9x^2 + 12x + 6 > 0$

$$x^3 - 12x^2 + 16x + 8 > 0$$

Намиране делителите на свободния член $-\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$. Тъй като старшият коефициент е 1, то ако полиномът $x^3 - 12x^2 + 16x + 8$ има нули, които са рационални числа, те ще са измежду числата $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$.

Прилагане схемата на Хорнер и получаване, че $x = 2$ е нула на полинома.

Тогава неравенството има вида: $(x - 2)(x^2 - 10x - 4) > 0$

Търсят се реалните корени на уравнението $x^2 - 10x - 4 = 0$.

$$D = 116 \text{ и следователно } x_{2,3} = \frac{10 \pm \sqrt{116}}{2} = 5 \pm \sqrt{29}.$$

$$(x - 2)(x - 5 - \sqrt{29})(x - 5 + \sqrt{29}) > 0$$

$$x \in (5 - \sqrt{29}; 2) \cup (5 + \sqrt{29}; +\infty)$$

в) Единственото число измежду числата a , b , c и d , което е решение на неравенството, е a , т.к. $a = \frac{3}{4}$ и $5 - \sqrt{29} < \frac{3}{4} < 2$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $a = \frac{3}{4}$, $b = -12$, $c = 8$ и $d = -8$	7 точки
б) $(x - 2)(x^2 - 10x - 4) > 0$	3 точки
$(x - 2)(x - 5 - \sqrt{29})(x - 5 + \sqrt{29}) > 0$ $x \in (5 - \sqrt{29}; 2) \cup (5 + \sqrt{29}; +\infty)$	3 точки
в) доказателство, че само $a = \frac{3}{4}$ е решение	2 точки

Задача 18.

Решение:

а) Нека $AB = c$.

$$\triangle ABC - \text{правоъгълен} \Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Получава се $AC = \frac{c}{3}$ cm и

$$\cos \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\cos \angle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{2}c}{3}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{c \cdot 2\sqrt{2}c}{18} = \frac{\sqrt{2}c^2}{9} \text{ cm}^2.$$

$\triangle CMC_1$ – правоъгълен, $\angle C_1CM = 90^\circ$, $CC_1 = h$, $C_1M = 6$ cm и $CM = \frac{c}{2}$ cm (CM медиана към хипотенузата в правоъгълния триъгълник $\triangle ABC$).

Следователно $CM^2 = C_1M^2 - C_1C^2$ (Питагорова теорема)

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 6^2 - h^2 \quad c^2 = 4(36 - h^2)$$

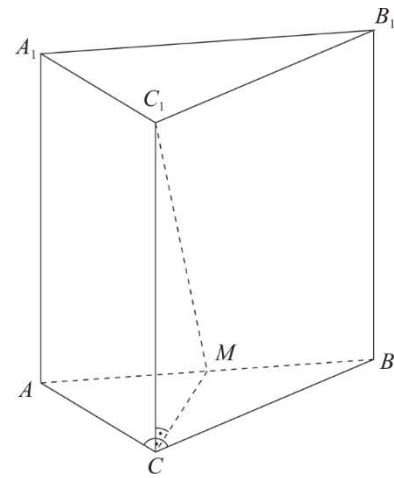
$CC_1 = h$ е катет в правоъгълния $\triangle CMC_1$ с хипотенуза $C_1M = 6$ cm.

Следователно $h \in (0; 6)$.

За обема на призмата $ABCA_1B_1C_1$ се получава:

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{2}c^2}{9} h = \frac{4\sqrt{2}}{9} (36 - h^2) h \text{ cm}^3,$$

$$\text{т.е. } V = V(h) = \frac{4\sqrt{2}}{9} (36 - h^2) h, \quad h \in (0; 6).$$



б) Обемът на призмата $ABCA_1B_1C_1$ е най-голям, когато функцията

$$V(h) = \frac{4\sqrt{2}}{9}(36 - h^2)h \text{ приема най-голяма стойност в интервала } (0; 6).$$

$$\text{Намира се } V'(h) = \left[\frac{4\sqrt{2}}{9}(36 - h^2)h \right]' = \frac{4\sqrt{2}}{9}(36h - h^3)' = \frac{4\sqrt{2}}{9}(36 - 3h^2).$$

$V(h)$ е растяща за $h \in (0; 2\sqrt{3})$ и намаляваща за $h \in (2\sqrt{3}; 6)$.

Най-голямата стойност се достига при $h = 2\sqrt{3}$ см.

$$V_{\max} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \left[36 - (2\sqrt{3})^2 \right] \cdot 2\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{6}}{3} \text{ см}^3$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране лицето на основата на призмата	4 точки
Намиране, че $h \in (0; 6)$	3 точки
$V(h) = \frac{4\sqrt{2}}{9}(36 - h^2)h$	2 точки
б) Изследване на функция и намиране на НГС	3 точки
$V = \frac{64\sqrt{6}}{3} \text{ см}^3$ при $h = 2\sqrt{3}$ см	3 точки