Министерство на образованието и науката

---

73. Национална олимпиада по математика
Областен кръг

11 февруари 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Дадено е уравнението

$$\Big((x+\sqrt{2})(\sqrt{5}-x)-3\Big)\Big((x+\sqrt{2})(\sqrt{5}-x)-4\Big)=0.$$

а) Колко реални корена има то?
б) Нека M и m са съответно най-големият и най-малкият сред реалните корени на даденото уравнение. Намерете естествени числа p, q, r, s, за които уравнението $y^2+(\sqrt{p}-\sqrt{q})y+r-\sqrt{s}=0$ има корени $y_1=3M-m$ и $y_2=3m-M$.

Отговор. а) 2; б) $p=8$, $q=20$, $r=27$, $s=1000$.

Решение. а) Търсените корени са корените на уравненията $(x+\sqrt{2})(\sqrt{5}-x)-3=0$ и $(x+\sqrt{2})(\sqrt{5}-x)-4=0$. Първото води до $-x^2+(\sqrt{5}-\sqrt{2})x+\sqrt{10}-3=0$, чиято дискриминанта е $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+4(\sqrt{10}-3)=5-2\sqrt{10}+2+4\sqrt{10}-12=\sqrt{40}-5>0$, така че то има два реални корена. Второто води до $-x^2+(\sqrt{5}-\sqrt{2})x+\sqrt{10}-4=0$, чиято дискриминанта е $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+4(\sqrt{10}-4)=5-2\sqrt{10}+2+4\sqrt{10}-16=\sqrt{40}-9<0$, така че то няма реални корени. Следователно даденото уравнение има два реални корена.
б) Според а) M и m са двата корена на първото уравнение. Формулите на Виет дават $M+m=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ и $Mm=3-\sqrt{10}$. Корените на търсеното уравнение имат сбор $3M-m+3m-M=2(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\sqrt{20}-\sqrt{8}$ и произведение $(3M-m)(3m-M)=10Mm-3(M^2+m^2)=16Mm-3(M+m)^2=48-16\sqrt{10}-3(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=48-16\sqrt{10}-15+6\sqrt{10}-6=27-10\sqrt{10}$. Търсеното уравнение е $y^2+(\sqrt{8}-\sqrt{20})y+27-\sqrt{1000}$.

Оценяване. (7 точки) а) 2 т.; б) 5 т., от които общо 1 т. за пресмятане на $M+m=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ и $Mm=3-\sqrt{10}$. и по 1 т. за обосновано намиране на всяко от p, q, r, s (или по $0,5$ т. за всяко от тях, ако методът е приложен правилно и има техническа грешка при пресмятането, включително при сгрешен знак или размяна на p с q).

Задача 8.2. Точките M и N са средите съответно на страните AD и BC на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O. Правата, съдържаща ъглополовящите на ъглите $\measuredangle AOD$ и $\measuredangle BOC$, пресича страните AD и BC в точките K и L, съответно.
а) Да се докаже, че ако $KL=MN$, то $AB=CD$.
б) Да се докаже, че $2KL\le AB+CD$. Има ли изпъкнали четириъгълници $ABCD$, за които $2KL=AB+CD$? Ако има, то кои са всички такива?

Решение. В общия случай имаме $\measuredangle MKO\ge 90^\circ$ и $\measuredangle NLO\ge 90^\circ$, например поради известния факт, че през връх на триъгълник ъглополовящата лежи между височината и медианата. Така ако M' и N' са петите на перпендикулярите от M и N към правата KL, то $MN\ge M'N'\ge KL$, като равенство се достига само при $M\equiv M'\equiv K$ и $N\equiv N'\equiv L$.
а) Тук $MN=KL$, съответно от по-горе имаме $M\equiv K$, $N\equiv L$, откъдето (от съвпадащи медиани и ъглополовящи) $AO=OD$ и $BO=OC$. Така $\triangle AOB\cong\triangle DOC$, съответно $AB=CD$.
б) Предвид вече доказаното $KL\le MN$, достатъчно е да докажем, че $2MN\le AB+CD$. Имаме

$$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

и остава да съобразим, че $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right| \leq \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right| = AB + CD$ от неравенството на триъгълника. Равенството $2MN = AB + CD$ се достига когато векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ са колинеарни, т.е. $AB \parallel CD$. Понеже $KL = MN$ изисква $AO = OD$ и $BO = OC$ от а), то непременно $ABCD$ е правоъгълник. Обратно, за всеки правоъгълник точките K и L са средите на AD и BC, съответно $KL = AB = CD = \frac{AB+CD}{2}$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за а), от които 1 т. за обосновка на $\measuredangle MKO \geq 90^\circ$ и $\measuredangle NLO \geq 90^\circ$, 1 т. за довършване на обосновката на $MN \geq KL$ и 1 т. за обосноваването на $AB = CD$ при случай на равенство; 4 т. за б), от които 1 т. за ясно свеждане до доказването на $2MN \leq AB + CD$, 1 т. за доказателство на $2MN \leq AB + CD$, 1 т. за аргументация кога $2MN = AB + CD$ и 1 т. за окончателно описание на четириъгълниците с $2KL = AB + CD$.

Задача 8.3. Ще наричаме естественото число n *модно*, ако n и броят C_n^3 на комбинациите без повторение на n елемента от трети клас имат равни остатъци при деление на 100. Например 24 е модно, понеже $C_{24}^3 = 2024$. Колко от трицифрените числа са модни?

Отговор. 82.

Решение. Числото n е модно точно когато 100 дели $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - n$, т.е. $600 = 2^3.3.5^2$ дели

$$P = n((n-1)(n-2) - 6) = n(n^2 - 3n + 2 - 6) = n(n+1)(n-4).$$

Трите множителя в P имат различни остатъци при деление на 3, така че $3 \mid P$ винаги. За $2^3 \mid P$ е необходимо и достатъчно $4 \mid n$ или $8 \mid n+1$. За $5^2 \mid P$ е необходимо и достатъчно $25 \mid n$ или $5 \mid n+1$.

- Имаме, че $4 \mid n$ и $25 \mid n$ едновременно тогава и само тогава, когато $100 \mid n$: има 9 такива трицифрени числа.
- Имаме, че $4 \mid n$ и $5 \mid n+1$ едновременно тогава и само тогава, когато $20 \mid n-4$: има $900 : 20 = 45$ такива трицифрени числа.
- Имаме, че $8 \mid n+1$ и $5 \mid n+1$ тогава и само тогава, когато $40 \mid n+1$; сред тези n трицифрени са $119, 159, \ldots, 999$: общо $\dfrac{999-119}{40} + 1 = 23$ числа.
- Имаме, че $8 \mid n+1$ и $25 \mid n$ тогава и само тогава, когато $200 \mid n+25$; сред тези n трицифрени са $175, 375, 575, 775, 975$: общо 5 числа

Окончателно, модните трицифрени числа са общо $9 + 45 + 23 + 5 = 82$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за замяна с условието $600 \mid n(n+1)(n-4)$; 1 т. за получаване, че $4 \mid n$ или $8 \mid n+1$; 1 т. за получаване, че $25 \mid n$ или $5 \mid n+1$; 1 т. за случая $100 \mid n$; 1 т. за случая $20 \mid n-4$; 1 т. за случая $40 \mid n+1$; 1 т. за случая $200 \mid n+25$

Задача 8.4. Множеството от естествените числа от 1 до 1000 включително е разделено на две групи A и B от по 500 числа всяка. За цяло число k нека N_k е броят двойки (a, b) от число a от A и число b от B, такива че $a - b = k$. Да се докаже, че:

а) при всяко такова разделяне съществува k с $N_k \geq 126$.
б) съществува разделяне, при което $N_k \leq 250$ за всяко k.

Решение. За краткост нека означим $n = 500$. Ако $N_k > 0$, то непременно $|k| \leq 2n - 1$.

а) Общият брой двойки от число от A и число от B е $n.n = n^2$, а броят на възможните разлики (т.е. стойностите на k) е $2(2n-1)+1 = 4n-1$. Така от принципа на Дирихле поне една разлика ще се среща поне $\left\lceil \frac{n^2}{4n-1} \right\rceil$ пъти, което надвишава $\frac{n^2}{4n-1} > \frac{n^2}{4n} = \frac{n}{4}$.

б) Да изберем A да се състои от числата от $\frac{n}{2}$ до $\frac{3n}{2} - 1$, а B да се състои от числата от 1 до $\frac{n}{2} - 1$ и от $\frac{3n}{2}$ до $2n$. Ако $1 \leq k \leq 2n-1$ и $a - b = k$, то $a > b$ и значи за b има не повече от $\frac{n}{2} - 1$ възможности. Ако $-(2n-1) \leq k \leq -1$ и $a - b = k$, то $a < b$ и значи за b има не повече от $2n - \frac{3n}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1$ възможности; обаче $b = -k$ не е възможно, така че всъщност оставаме с не повече от $\frac{n}{2}$ възможности.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за а), от които 1 т. за преброяване на възможностите за двойката (a, b), 1 т. за преброяване на възможностите за k и 1 т. за завършване; 4 т. за б), от които 2 т. за явен пример и 2 т. за проверка, че работи

Задача 9.1. Да се реши системата уравнения:

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 + x + y &= 9 \\ x^3y + xy^3 + x^2 + y^2 &= 15. \end{aligned}$$

Решение. Разлагаме на множители и двете уравнения:

$$\begin{aligned} (x+y)(xy+1) = 9 \\ (x^2+y^2)(xy+1) = 15. \end{aligned}$$

Следователно можем да разделим второто уравнение на първото. Нека положим $u = x + y$, $v = xy$. Значи $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$.
Разделяме, заместваме с u и v и получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{u^2 - 2v}{u} = \frac{5}{3} \\ u(v+1) = 9. \end{aligned}$$

От първото уравнение изразяваме $v = \dfrac{3u^2 - 5u}{6}$ и заместваме във второто:

$$u\frac{3u^2 - 5u}{6} + u = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3u^3 - 5u^2 + 6u - 54 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (u-3)(3u^2 + 4u + 18) = 0.$$

Разлагането може да бъде направено например чрез схема на Хорнер. Квадратният тричлен е положителен ($D = 4(2^2 - 3 \cdot 18) < 0$) и значи $u = 3$ е единственото реално решение. Тогава $v = 2$. Връщаме полагането:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ xy &= 2. \end{aligned}$$

По формулите на Виет, x и y са корени на полинома $z^2 - 3z + 2$ и значи получаваме $(x, y) = (1, 2)$ или $(x, y) = (2, 1)$.

Оценяване. (7 точки) 1т. за разлагане на системата, 1т за полагането, 1т. за изразяване на v чрез u. 2т. за намиране на u, 1т. за прилагане на формулите на Виет и 1т. за верен отговор. Всяко друго вярно решение се оценява със 7 точки.

Задача 9.2. Точките D и E лежат на страните AB и AC на триъгълник ABC, като $DE \parallel BC$. Точките A_1 и A_2 лежат върху страната BC така, че A_1 е между B и A_2, а $BA_1 = CA_2$. Ако AA_1 пресича BE в точка M, а AA_2 пресича CD в точка N, да се докаже, че MN е успоредна на BC.

Решение. Нека AA_1 и AA_2 пресичат DE съответно в точки P и Q. Тъй като $BA_1 = CA_2$ и

$$\frac{BA_1}{DP} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{CA_2}{EQ},$$

то $DP = EQ$. Следователно $DQ = DP + PQ = EQ + PQ = EP$ и от

$$\frac{BM}{ME} = \frac{BA_1}{EP} \text{ и } \frac{CN}{ND} = \frac{CA_2}{DQ}$$

получаваме $\dfrac{BM}{ME} = \dfrac{CN}{ND}$ и твърдението следва от теоремата на Талес.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $DQ = EP$, 3 т. за $\dfrac{BM}{ME} = \dfrac{CN}{ND}$, 1 т. за довършване.

Задача 9.3. Естественото число n ще наричаме *свръхквадратно*, ако $n = m^2$ за някое естествено число m, десетичния запис на n съдържа единствено цифрите $\{0, 4, 9\}$ (не непременно всяка от трите цифри трябва да участва в записа!), и n не се дели на 10. Например, 49 е свръхквадратно число, но 4900 не е. Съществуват ли безбройно много свръхквадратни числа?

Решение. Да. За всяко $k \geq 1$ можем да вземем

$$\begin{aligned} n_k = (2 \cdot 10^{2k} + 10^k + 2)^2 &= \left(2 \cdot 10^{2k}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10^{2k} \cdot 10^k + (2 \cdot 2 \cdot 2 + 1) \cdot 10^{2k} + 2 \cdot 10^k \cdot 2 + 2^2 \\ &= 4 \cdot 10^{4k} + 4 \cdot 10^{3k} + 9 \cdot 10^{2k} + 4 \cdot 10^k + 4. \end{aligned}$$

При $k = 1$ имаме $212^2 = 44944$, а при $k > 1$, $k - 1$ нули разделят всеки две последователни ненулеви цифри. Следователно, n_k е свръхквадратно за всеки избор на $k \geq 1$.

Оценяване. (7 точки) 1т. за $n = 212^2$ или друг единичен (но поне трицифрен за $m!$) пример. 7т. за пълно решение.

Задача 9.4. В Лемурия има 2024 града, всеки два от които са свързани с директен полет, чиято цена е или 1 грош, или 2 гроша. Всеки маршрут, който започва и свършва в един и същи град струва четно количество грошове. Ако закупим по един билет за всеки директен полет (пътуването от A до B и от B до A считаме за един и същ полет, като и цената в двете посоки винаги е една и съща), колко най-малко би могло да струва това?

Решение. За да намерим минималната стойност трябва да намерим най-големият възможен брой полети, струващи 1 грош.
Нека да разгледаме графът, формиран от онези полети, които струват 1 грош. Очевидно, в него не може да има нечетни цикли и значи е **двуделен** (т.е. граф, чиито върхове могат да бъдат разделени на две непресичащи се множества, така че всички ребра свързват елемент на едното с елемент на другото множество). И обратно - всички цикли в пълен двуделен граф са четни.
Сега, нека тези две множества имат съответно n и m елемента. $n + m = 2024$ и броят на ребрата на графа е nm. Лесно можем да покажем (например чрез квадратно уравнение или неравенство между средните), че най-голямата стойност на произведението е при $n = m = 1012$.
Сега вече можем да конструираме мрежа с минимална сума на цените - разделяме градовете на две множество от по 1024, като полетите между множествата струват 1 грош, а вътре в множествата - 2 гроша. Сумата от цените е

$$1012^2 + 2\frac{1012 \cdot 1011}{2} = 2047276$$

Оценяване. (7 точки) 3т. за двуделността. 3т. за примера, 1т. за отговор. Не се отнемат точки, ако финалната сметка е оставена като $1012^2+(1012\cdot1011)$ или е работено с произволно n вместо с 2024 и отговорът е представен като полином на n.
Коментар. Разсъжденията за двуделността реално представляват теорема на Мантел, частен случай на теоремата на Туран за графи без триъгълници. Употребата на тези теореми е допустима.

Задача 10.1. Третият, деветият и тридесет и деветият член на растяща аритметична прогресия са последователни членове на геометрична прогресия в този ред.
а) Да се намери частното на геометричната прогресия.
б) Ако разликата на аритметичната прогресия е 2 и сумата на първите ѝ n члена е 2024, то да се намери n.

Решение. а) Да означим членовете на нарастващата аритметична прогресия с $a_1, a_2, \dots,$ а разликата ѝ с $d > 0$. Имаме, че a_3, a_9, a_{39} образуват в този ред геометрична прогресия и значи, частното е $q = a_9/a_3$, а също така е в сила равенството

$$a_9^2 = a_3 \cdot a_{39} \quad \Leftrightarrow \quad (a_3 + 6d)^2 = a_3(a_3 + 36d) \quad \Leftrightarrow \quad 24a_3d = 36d^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2a_3 = 3d.$$

Тогава, $a_9 = a_3 + 6d = a_3 + 2(3a_3) = 5a_3$ и значи $q = a_9/a_3 = 5$.
б) От подточка а) имаме, че $a_3 = 3d/2 = 3$, следователно $a_1 = a_3 - 2d = -1$. Общата формула за сумата S_n на първите n члена на аритметичната прогресия се записва така:

$$2024 = S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot (-1) + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (n-2)n.$$

Разлагайки квадратното уравнение $n^2 - 2n - 2024 = 0$ на множители, получаваме $(n - 46)(n+44) = 0$ и тъй като n трябва да е естествено число, то $n = 46$.

Оценяване. (7 точки) а) (4 точки) 2т. за $2a_3 = 3d$; 2т. за довършване; б) (3 точки) 1т. за пресмятане на a_1; 1т. за извеждане на квадратното уравнение $n^2 - 2n - 2024 = 0$; 1т. за неговото решаване. Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки. При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 10.2. Даден е остър ъгъл с връх O и големина α. Точка P е фиксирана във вътрешността на ъгъла. Точки M и N са върху раменете на ъгъла, такива че P е вътрешна за триъгълник OMN и $\angle MPN = 180^\circ - \alpha$. Да се докаже, че когато точките M и N се движат по двете рамена на ъгъла, петата на перпендикуляра от P към MN лежи на фиксирана окръжност.

Решение. Нека K и L са петите на перпендикулярите от точка P към раменете на ъгъла (O, K, M са върху едното рамо, а O, L, N – върху другото). Нека точка R е средата на PO. От вписаните четириъгълници $QPLN$ и $QPKM$ следва, че $\angle KQL = \angle KQP + \angle PQL = \angle PMO + \angle PNO = 180^\circ - 2\alpha$ (това е от сбор ъгли в $MONP$). От R среда на хипутенуза в правоъгълните триъгълници PLO и PKO следва, че $\angle LRK = 2\alpha$. Следователно $QKRL$ е вписан и точка Q лежи върху фиксираната окръжност, описана около $\triangle KRL$. Задачата е доказана.

Оценяване. (7 точки) 1т. за построяване на точки K и L; по 1т. за $QPLN$ и $QPKM$ – вписани четириъгълници; 1т. за пресмятане на $\angle KQL$; 1т. за построяване на точка R; 1т. за $QKRL$ – всписан; 1т. за финален извод.

Задача 10.3. Да се намери вероятността при хвърляне на зар (стандартен, с форма на куб), числото k, което се падне да притежава следното свойство: За всяко просто число p, за което съществуват естествени числа a, b такива, че $p^2 = a^2 + k \cdot b^2$, съществуват и естествени числа x, y такива, че $p = x^2 + k \cdot y^2$.

Отговор. $\frac{1}{2}$.

Решение. Възможните стойности за k са $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и те са равновероятни. Директно проверяваме, че при $k = 3$ и $(a, b) = (1, 1)$ имаме, че $2^2 = 1^2 + 3 \cdot 1^2$ и това е най-малката възможна сума за $a^2 + k \cdot b^2$. Следователно, $p = 2$ не изпълнява свойството и $k = 3$ не е решение. При $k = 5$ и $(a, b) = (2, 1)$ имаме, че $3^2 = 2^2 + 5 \cdot 1^2$ и $x^2 + 5 \cdot y^2 \geq 1 + 5 = 6 > 3$. Следователно, $p = 3$ не изпълнява свойството и $k = 5$ не е решение. При $k = 6$ и $(a, b) = (1, 2)$ имаме, че $5^2 = 1^2 + 6 \cdot 2^2$ и $x^2 + 6 \cdot y^2 \geq 1 + 6 = 7 > 5$. Следователно, $p = 5$ не изпълнява свойството и $k = 6$ не е решение.

Ще покажем, че свойството е изпълнено за всяко $k \in \{1, 2, 4\}$.
Наистина, при $k \in \{1, 4\}$, свойството е директно следствие от характеризацията на Питагоровите тройки. И в двата случая директно се проверява, че $p = 2$ не води до решения в естествени числа на уравнението $p^2 = a^2 + k \cdot b^2$. Следователно е необходимо да разглеждаме само нечетни p. Но тогава, от $p^2 = a^2 + k \cdot b^2$ следва, че числата са две по два взаимно прости, т.е., $(a, p) = (b, p) = (a, b) = 1$. При $k = 4$, имаме че a е нечетно, а при $k = 1$ – че точно едно от числата в двойката (a, b) е нечетно. Оттук, поради симетрия във втория случай, б.о.о. можем да разглеждаме единствено нечетни a. Тогава и в двата случая $(p - a, p + a) = 2$, а $k \cdot b^2 = (2b_1)^2$, т.е., имаме, че

$$(2b_1)^2 = (p - a)(p + a) \quad \Rightarrow \quad \exists x, y \in \mathbb{N} : p - a = 2x^2 \text{ и } p + a = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad p = x^2 + y^2.$$

Не може $p - a = x^2$ и $p + a = y^2$, защото тогава и x и y трябва да са четни и значи $(p - a, p + a) \geq 4 > 2$. Противоречие.
При $k = 2$, отново имаме че $4 = a^2 + 2b^2$ няма решение в естествени числа и значи се интересуваме само от нечетни p. Нека разгледаме произволно нечетно просто, което изпълнява условието $p^2 = a^2 + 2b^2$ за някоя двойка естествени числа (a, b). Отново имаме, че $(a, p) = (b, p) = (a, b) = 1$; a е нечетно; b е четно, защото в противен случай $p^2 \equiv 3 \pmod 4$, което е невъзможно; и $(p - a, p + a) = (p - a, 2p) = 2$. Ясно е, че ако a удовлетворява равенството, то $-a$ – също, така че б.о.о. (с точност до знак за a) можем да си мислим, че $4 \nmid p - a$. Тогава, съществуват естествени числа x, y (x – нечетно) такива, че

$$|p + a| = (2y)^2, \qquad |p - a| = 2x^2, \qquad b = 2xy.$$

Но, от $b > 0$ имаме, че $|p| > |a|$ и значи и двете числа $p + a, p - a$ са положителни. Окончателно, $2p = 2x^2 + (2y)^2$ и тогава $p = x^2 + 2y^2$. С това случая $k = 2$ е завършен.
Така, търсената вероятност е

$$P = \frac{\#\text{ брой добри случаи}}{\#\text{ всички случаи}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Оценяване. (7 точки) 2т. за примери, че всичките $k \in \{3, 5, 6\}$ не изпълняват условието; по 2т. за случаите $k \in \{1, 4\}$ и $k = 2$; 1т. за обоснован отговор. Ако са дадени контрапримери само за две от трите $k \in \{3, 5, 6\}$ се присъжда 1 точка.

Задача 10.4. Във всяка клетка на квадрат 10×10 е записано цяло число. Правоъгълник, съставен от клетки на квадрата, ще наричаме *добър*, ако сумата от числата в него се дели на 5. Разрешено е едновременно да се оцветят всички клетки в добър правоъгълник, но е забранено една клетка да се оцветява повече от веднъж. Да се намери максималното число d, за което е възможно винаги да се оцветят поне d клетки при произволен първоначален избор и разположение на числата.

Отговор. $84 = 10^2 - 4^2$.

Решение. Ще докажем следното помощно твърдение:
Лема. В правоъгълник $1 \times k$ е възможно да се оцветят няколко няколко непресичащи се добри правоъгълника, съдържащи поне $k - 4$ клетки.

Доказателство: Ще проведем индукция по k. Твърдението е тривиално при $k \leq 4$. Нека $k \geq 5$ и в петте най-леви клетки да са записани числата $a_1, \dots, a_5$. Измежду числата $0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_5$ има две, които дават еднакви остатъци при деление на 5. Тогава тяхната разлика има вида $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ за някои $1 \leq i \leq j \leq 5$. Следователно правоъгълника $R_{i,j}$, съставен от клетките от i-та до j-та включително е добър и можем да го "премахнем". Останалите клетки дефинират нов правоъгълник $1 \times (k - (j - 1 + 1))$, в който, съгласно индукционното предположение, можем да оцветим няколко непресичащи се добри правоъгълника така, че да остана не повече от 4 неоцветени клетки. Лесно се съобразява, че ако премахнатия правоъгълник $R_{i,j}$ е вътрешен за някой от добрите правоъгълници за $1 \times (k - (j - 1 + 1))$, то обединението на тези два добри правоъгълника отново е добър правоъгълник. Така, в изходния правоъгълник ще има оцветени общо поне $k - 4$ клетки, с което лемата е доказана.

Ще докажем, че е възможно да оставим не повече от $4^2 = 16$ неоцветени клетки. Да приложим лемата за правоъгълник 1×10 в клетките на който са записани сумите от числата в стълбовете на изходния квадрат. Получаваме няколко добри правоъгълника и можем да оцветим съответните им правоъгълници с височина 10 в изходния квадрат. След това ще останат неоцветени не повече от 4 стълба и лемата за всеки от тях оставя неоцветени общо не повече от $4 \times 4 = 16$ неоцветени клетки. Следователно $d \geq 10^2 - 4^2 = 84$.

От друга страна, ако във всички клетки на горния ляв 4×4 квадрат на изходния квадрат запишем числото 1, а във всички останали клетки на изходния квадрат запишем числото 0, то лесно се съобразява, че единствения начин да боядисваме клетка с 1 в нея е тя да бъде част от добър правоъгълник за горния ляв 4×4 квадрат. Но тъй като 5 е просто число, това е възможно само когато поне един от размерите на правоъгълника се дели на 5, което няма как да се случи при $4 < 5$. Така, в този случай всички 16 клетки, съдържащи единица остават винаги небоядисани. Следователно $d \leq 100 - 16 = 84$.

Окончателно, $d = 84$.

Оценяване. (7 точки) 3т. за доказване на лемата; по 2т. за $d \geq 84$ и $d \leq 84$. Ако няма друг напредък по задачата се присъжда 1т. за верен отговор (но тази точка не е адитивна към никои от горните!)

Задача 11.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$3x^5 + x^4 + (a-2)x^3 + (a-2)x^2 + x + 3 = 0$$

има три различни реални корена.

Решение. Тъй като от схемата на Хорнер директно се вижда, че $x_1 = -1$ е решение на уравнението, то представяме уравнението във вида $(x+1)(3x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 3) = 0$. Уравнението $3x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 3 = 0$ след разделяне на $x^2 \neq 0$ (очевидно $x = 0$ не е решение) добива вида

$$3(x^2 + 1/x^2) - 2(x + 1/x) + a = 0,$$

откъдето получаваме $3t^2 - 2t + a - 6 = 0$, където $t = x + 1/x$. За да има даденото в условието уравнение три различни реални корена, то $3x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 3 = 0$ трябва да има три различни реални корена, единият от които да е -1, а другите два да са различни от -1 или два различни реални корени, които не са равни на -1. Уравнението $t = x + \dfrac{1}{x}$ има реални корени когато $t \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. Това означава, че за $3t^2 - 2t + a - 6 = 0$ има следните възможности:

1. $t_1 = t_2 \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$; Този случай е невъзможен, тъй като $t_1 = t_2 = \dfrac{1}{3}$.

2. $t_1 = -2$ и $t_2 \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. Тогава $t_1 = -2$ при $a = -10$ и получаваме $t_2 = \dfrac{8}{3} \in (2; \infty)$.

3. $t_1 \in (-2; 2)$ и $t_2 \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. Този случай е еквивалентен на $f(-2).f(2) < 0$, където $f(t) = 3t^2 - 2t + a - 6$. Така получаваме $(2 + a).(10 + a) < 0$, т. е $a \in (-10; -2)$. Така окончателно получаваме, че $a \in [-10; -2)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $(x+1)(3x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 3) = 0$; 2 т. за $3t^2 - 2t + a - 6 = 0$ с $t = x + 1/x$; по 1 т. за разглеждане и решаване на всеки от трите случая за t_1 и t_2; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 11.2. Трапецът $ABCD$ ($AB \parallel CD,\ AB > CD$) е вписан в окръжност с радиус 9 cm. Петата на перпендикуляра от върха C към основата AB я разделя в отношение $2 : 1$, считано от върха A. Ако дължината на диагонала AC е равна на дължината на основата AB, то да се намери лицето на трапеца.

Решение. Тъй като трапецът $ABCD$ е вписан, то той е равнобедрен. Нека $CP, P \in AB$ е височината от върха C. От условието $AP : PB = 2 : 1$, получаваме, че $AB = 3CD$. Нека означим с α острия ъгъл на трапеца, т.е. $\measuredangle ABC = \alpha$. От $AC = AB$ следва, че $\triangle ABC$ е равнобедрен с ъгли $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = \alpha$ и $\measuredangle BAC = 180^\circ - 2\alpha$. От правоъгълния $\triangle APC$ имаме

$$\measuredangle PAC = 180^\circ - 2\alpha < 90^\circ.$$

т. е. $\alpha \in (45^\circ; 90^\circ)$ или $2\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$. От правоъгълните $\triangle APC$ и $\triangle BPC$ изразяваме

$$\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = CP/AP \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = CP/BP,$$

откъдето $\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha)/(\operatorname{tg}\alpha) = BP/AP = 1/2$. Тъй като $\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = -\operatorname{tg}(2\alpha) = -(2 \cdot \operatorname{tg}\alpha)/(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)$, получаваме $-2/(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 1/2$, т.е. $\operatorname{tg}^2\alpha = 5$, откъдето $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$, т. к. α е остър ъгъл. Пресмятаме $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$ и $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. От синусова теорема за $\triangle ABC$ намираме $AB = 3\sqrt{30}$ cm, а от $AB = 3CD$, $CD = \sqrt{30}$ cm. От $\triangle BPC$ имаме $CP = BP \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{30} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{6}$ cm. Тогава лицето на трапеца е равно на

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot CP = 2 \cdot \sqrt{30} \cdot 5\sqrt{6} = 60\sqrt{5}\ \text{cm}^2$$

.

Оценяване. (7 точки) 0,5 т. за $AB = 3CD$; 1 т. за въвеждане на ъгъл α и изразяване на ъглите $\measuredangle ABC, \measuredangle ACB$ и $\measuredangle BAC$ чрез α; 1 т. за изводите за α и 2α; 2 т. за намиране на $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; 1 т. за намиране дължината на AB; 1 т. за CD и CP; 0,5 т. за пресмятане на лицето.

Задача 11.3. Естествено число n се нарича *добро*, ако n има четен брой делители:

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{2k-1} < d_{2k} = n,$$

за които $d_{k+1} - d_k = 2$ и $d_{k+2} - d_{k-1} = 65$. Да се намери най-малкото добро число.

Решение. Тъй като $d_k.d_{k+1} = d_{k-1}.d_{k+2} = n$, то от условието получаваме $d_k^2 + 2d_k - n = 0$ и $d_{k-1}^2 + 65d_{k-1} - n = 0$. Дискриминантите на двата квадратни тричлена трябва да бъдат точни квадрати, откъдето $4 + 4n = t^2$ и $65^2 + 4n = s^2$. След почленно изваждане намираме $s^2 - t^2 = 63.67 = 3^2.7.67$. Следователно $s - t = 1, 3, 7, 9, 21, 63$ и съответно $s+t = 3^2.7.67, 3.7.67, 3^2.67, 7.67, 3.67, 67$. За всеки от случайте получаваме решения съответно $s = 65, 111, 239, 305, 705, 2111$. При $s = 65$ получаваме $n = 0$, което е невъзможно, а при $s = 111$ получаваме $n = 2024$. За останалите стойности на s получаваме по-големи n.

Оценяване. (7 точки) 1 точка за едното или двете равенства $d_k^2 + 2d_k - n = 0$ и $d_{k-1}^2 + 65d_{k-1} - n = 0$; по 1 точка за всяко от равенствата $4 + 4n = t^2$ и $65^2 + 4n = s^2$; 2 точки за $s^2 - t^2 = 3^2.7.67$; 1 точка за $s - t = 1, 3, 7, 9, 21, 63$ и $s + t = 3^2.7.67, 3.7.67, 3^2.67, 7.67, 3.67, 67$; 1 точка за намиране на $n = 2024$.

Задача 11.4. В клетките на квадратна таблица 2025×2025 са записани числата $1, 2, 3, \dots, 2024, 2025$, всяко по 2025 пъти. Да се докаже, че в някой ред или в някоя колона на таблицата се срещат поне 45 различни числа.

Решение. Да означим с x_i, $i = 1, 2, \dots, 2025$ броят на редовете на таблицата, в които се среща числото i, а с y_i, $i = 1, 2, \dots, 2025$ броят на колоните на таблицата, в които се среща числото i. Тъй като всяко число i може да се среща само в пресечна клетка на ред с i и колона с i, то $x_i y_i \geq 2025$. Следователно

$$x_i + y_i \geq 2\sqrt{x_i y_i} = 90.$$

Да означим с a_i, $i = 1, 2, \dots, 2025$ броят на различните числа в ред i, а с b_i, $i = 1, 2, \dots, 2025$ броят на различните числа в колона i. Всяко i дава принос x_i към сумата $\sum_{i=1}^{2025} a_i$ и принос y_i към сумата $\sum_{i=1}^{2025} b_i$. Тогава:

$$\sum_{i=1}^{2025} a_i + \sum_{i=1}^{2025} b_i = \sum_{i=1}^{2025} x_i + \sum_{i=1}^{2025} y_i \geq 90.2025.$$

От горното равенство следва, че някое от числата a_i и/или b_i е поне 45.

Оценяване. (7 точки) 2 точки за $x_i y_i \geq 2025$; 2 точки за $x_i + y_i \geq 2\sqrt{x_i y_i} = 90$ в контекста на задачата; 2 точки за $\sum_{i=1}^{2025} a_i + \sum_{i=1}^{2045} b_i = \sum_{i=1}^{2025} x_i + \sum_{i=1}^{2025} y_i$; 1 точка за довършване.

Задача 12.1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC със среда на страната AB точка M. Нека точка D е на отсечката MB, а точките I_1 и I_2 са центровете на вписаните окръжности съответно за триъгълник ADC и триъгълник BDC. Ако $\measuredangle I_1 M I_2 = 90^\circ$, то да се докаже, че $AC = BC$.

Решение. Нека N е средата на I_1I_2, а X и Y са петите на перпендикулярите от I_1 и I_2 към правата AB. Нека H е петата на перпендикуляра от N към AB. Тогава $\measuredangle I_1MI_2 = \measuredangle I_1DI_2 = 90^\circ$ дава, че H е средата на отсечката MD, а т.к I_1XYI_2 е трапец, то H също е среда и на отсечката XY. Така получаваме, че $XM = DY$. Имаме, че

$$XM = AM - AX = \frac{AB - (AD + AC - CD)}{2} = \frac{AB + CD - AD - AC}{2},$$

както и

$$DY = \frac{CD + BD - BC}{2}.$$

Тъй като $AD + BD = AB$, то получаваме $AC = BC$.

Оценяване. (7 точки) 1т. за дефиниране на точките N, X, Y, (и трите трябва да са дефинирани за тази точка), 1т. за дефинирне на т.H, 1т. за доказване, че H е средата на MD, 1т. за доказване, че $XM = DY$, 3т. за довършване.

Задача 12.2. Дадено е естествено число N. Нека x_n е редица от неотрицателни реални числа такава, че

$$x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{x_i x_{n-i}}$$

за всяко $n > N$. Да се докаже, че съществува константа $c > 0$, за която $x_n \leq \frac{n}{2} + c$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение. За $n > N$ имаме

$$x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{x_i x_{n-i}} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i.$$

Оттук нататък задачата може да се реши по 2 начина:
(Първи начин) Нека c е такова, че $c + \frac{n}{2} > x_n$ за $n = 1, 2, \ldots, N$. Ще докажем с индукция по n, че $x_n \leq \frac{n}{2} + c$ за всяко n. Базовият случай е $n = 1, 2, \ldots, N$.
Нека сега $x_i \leq \frac{i}{2} + c$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$ за някое естествено число $n \geq N + 1$. Тогава

$$x_n^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{2} + c\right) = \frac{n(n-1)}{4} + (n-1)c \leq \frac{n^2}{4} + nc + c^2,$$

откъдето следва, че $x_n \leq \frac{n}{2} + c$ и индукцията е завършена.
(Втори начин) Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека редицата a_n е зададена чрез $a_1 = \sum_{i=1}^{N} x_i$ и $a_{i+1} = a_i + \sqrt{a_i}$ за $i \geq 1$. Ще покажем с индукция по k, че $x_{N+k}^2 \leq a_k$ и $\displaystyle\sum_{i=1}^{N+k-1} x_i \leq a_k$. За $k = 1$ твърдението

следва от неравенството по-горе за $n = N + 1$. Ако сме го доказали за някое k, то от неравенството за $n = N + k + 1$ имаме, че

$$x_{N+k+1}^2 \leq x_{N+k} + \sum_{i=1}^{N+k} x_i \leq \sqrt{a_k} + a_k = a_{k+1},$$

където предпоследното равенство следва от индукционната хипотеза, а последното от дефиницията на редицата a_i. Така получихме, $x_{N+k} \leq \sqrt{a_k}$ за всяко k. От друга страна имаме, че $\sqrt{a_{t+1}} \leq \sqrt{a_t} + \frac{1}{2}$, което след сумиране за $t = 1, 2, \ldots, k-1$ получаваме, че $\sqrt{a_k} \leq \frac{k-1}{2} + \sqrt{a_1}$. Следователно $x_{N+k} \leq \frac{k}{2} + \sqrt{a_1} - \frac{1}{2}$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Така за достатъчно голямо $c > 0$ получаваме, че $x_n \leq \frac{n}{2} + c$ за всяко n, което трябваше да докажем.

Оценяване. (7 точки) (Първи начин) 2т. за прилагане на СА-СГ, 1т. за идея за индукция по n, 4т. за довършване.
(Втори начин) 2т. за прилагане на СА-СГ, 1т. за дефиниране на редицата a_i, 2т. за показване, че $x_{N+k} \leq \sqrt{a_k}$ за всяко k и 2т. за довършване

Задача 12.3. Даден е триъгълник $A_0B_0C_0$. За $n \geq 1$ дефинираме точките A_n, B_n, C_n по следния начин. Точката A_n е на отсечката $B_{n-1}C_{n-1}$ и е такава, че $B_{n-1}A_n : C_{n-1}A_n = 2 : 1$, точката B_n е на отсечката $A_{n-1}C_{n-1}$ и е такава, че $C_{n-1}B_n : A_{n-1}B_n = 2 : 1$, а точката C_n е на отсечката $A_{n-1}B_{n-1}$ и е такава, че $A_{n-1}C_n : B_{n-1}C_n = 2 : 1$. Да се докаже, че съществува единствена точка P, която лежи във вътрешността на всеки един от триъгълниците $A_nB_nC_n$.

Решение. Първо ще докажем, че медицентърът G на $\triangle A_0B_0C_0$ е медицентър за $\triangle A_nB_nC_n$ за всяко $n \geq 0$. Твърдението следва с индукция по n. Да допуснем, че G е медицентър на $\triangle A_nB_nC_n$. Тогава да означим върховете A_n, B_n, C_n с комплексните числа a, b, c. Тогава $g = \frac{a+b+c}{3}$, а $a_{n+1} = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}b$, $b_{n+1} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c$ и $c_{n+1} = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a$. Така получаваме, че $g = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}}{3}$, т.е g е медицентър на $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ и индукцията е завършена. Следователно G лежи във вътрешността на $\triangle A_nB_nC_n$ за $n \in \mathbb{N}$.
От друга страна, ако допуснем, че съществува точка $P \neq G$, която лежи във вътрешността на $\triangle A_nB_nC_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то от съображения за изпъкналост отсечката GP лежи във всеки от триъгълниците. Така получаваме, че $|GP| \leq \max(|A_nB_n|, |B_nC_n|, |C_nA_n|)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. От косинусова теорема за $\triangle A_nB_nC_n$ и $\triangle A_nB_{n+1}C_{n+1}$ получаваме

$$\frac{|B_nA_n|^2 + |C_nA_n|^2 - |A_nB_n|^2}{2|B_nA_n||C_nA_n|} = \cos\measuredangle B_nA_nC_n = \frac{|B_{n+1}A_n|^2 + |C_{n+1}A_n|^2 - |B_{n+1}C_{n+1}|^2}{2|A_nC_{n+1}||A_nB_{n+1}|}$$

и т.к $|B_{n+1}A_n| = \frac{|A_nC_n|}{3}$ и $|C_{n+1}A_n| = \frac{2|A_nB_n|}{3}$, то имаме

$$|B_{n+1}C_{n+1}|^2 = \frac{2}{9}|A_nB_n|^2 + \frac{2}{9}|B_nC_n|^2 - \frac{1}{9}|A_nC_n|^2.$$

Следователно

$$|B_{n+1}C_{n+1}|^2 + |C_{n+1}A_{n+1}|^2 + |A_{n+1}B_{n+1}|^2 = \frac{|A_nB_n|^2 + |B_nC_n|^2 + |C_nA_n|^2}{3}.$$

Така получаваме

$$|A_nB_n|^2 + |B_nC_n|^2 + |C_nA_n|^2 = \frac{|A_0B_0|^2 + |B_0C_0|^2 + |C_0A_0|^2}{3^n},$$

откъдето следва, че $\max(|A_nB_n|, |B_nC_n|, |C_nA_n|) \to 0$ като $n \to \infty$, което е противоречие с $|GP| > 0$.

Оценяване. 2т. за доказване че медицентърът лежи във всеки от триъгълниците, 1т. за наблюдението, че ако точка P е във всички триъгълници, то $|GP| \leq \max(|A_nB_n|, |B_nC_n|, |C_nA_n|)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, 1т. за разглеждане на сумата от квадратите на страните, 3т. за доказване, че тя се схожда към 0.

Забележка: За аргумент, че лицето на $\triangle A_nB_nC_n$ клони към 0 когато $n \to \infty$ се присъждат 0т., т.к той не води до доказване на единствеността на вътрешната точка.

Задача 12.4. Да се намерят всички двойки естествени числа (n, k), за които всяко нечетно естествено число $m > 20242024$ може да се представи във вида

$$m = a_1^{n^2} + a_2^{(n+1)^2} + \cdots + a_{k+1}^{(n+k)^2}$$

за някои неотрицателни цели числа $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$.

Отговор. $(n, k) = (1, k)$ за всяко $k \in \mathbb{N}$.

Решение. При $n = 1$ можем да вземем $a_1 = m$, а $a_2 = \cdots = a_{k+1} = 0$.
Нека сега $n \geq 2$. Да допуснем, че съществува естествено число k, за което двойката (n, k) изпълнява условието. За всяко естествено число m с $f(m)$ ще означаваме броят естествени числа $s \leq m$, които могат да се представят в искания вид. Имаме, че ако $a_1^{n^2} + a_2^{(n+1)^2} + \cdots + a_k^{(n+k)^2} \leq m$, то $a_i \leq m^{\frac{1}{(n+i)^2}}$, което значи, че за a_i имаме най-много $m^{\frac{1}{(n+i)^2}} + 1$ възможности за всяко $1 \leq i \leq k$. Освен това имаме, че $m^{\frac{1}{(n+i)^2}} + 1 < 2m^{\frac{1}{(n+i)^2}}$ и значи за $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ имаме най-много

$$\prod_{i=0}^{k} 2m^{\frac{1}{(n+i)^2}} = 2^{k+1} m^{\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(n+i)^2}} \leq 2^{k+1} m^{\frac{3}{4}},$$

защото

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(n+i)^2} \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(2+i)^2} \leq \frac{1}{4} + \sum_{i=3}^{k+2} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} \leq \frac{3}{4}.$$

Така получаваме, че $f(m) \leq 2^{k+1} m^{\frac{3}{4}}$ и значи $m \leq 3 \cdot 2^{k+1} m^{\frac{3}{4}}$(т.к според допускането ни $f(m) > \frac{m}{3}$ за големи m), което дава противоречие за големи стойности на m.

Оценяване. (7 точки) 1т. за дефиниране на f, 2т.за броят на възможностите за a_i е по-малък от $2m^{\frac{1}{(n+i)^2}}$, 1т. за $f(m) \leq 2^{k+1} m^{\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(n+i)^2}}$ и 1т. за $\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(n+i)^2} < \frac{3}{4}$, 2т. за довършване.

Забележка. За проверка, че $(1, k)$ работи за всяко k се присъждат 0т. и при липса на такава не се отнемат точки от пълно решение.