

# Национална олимпиада по математика, национален кръг, 29 май 2009 г.

## Тема за 8 клас

Задача 1. Диагоналите  $AC$  и  $BD$  на вписания четириъгълник  $ABCD$  се пресичат в точката  $P$ , а точката  $M$  е средата на страната  $AB$ . Известно е, че правите  $PM$  и  $CD$  са перпендикулярни и че центърът на окръжността, описана около четириъгълника, не лежи върху правата  $PM$ . Да се докаже, че диагоналите на четириъгълника  $ABCD$  са перпендикулярни.

Задача 2. Да се докаже, че за всеки три положителни числа  $a, b, c$  е вярно неравенството

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9} + \frac{b}{(3b+c+a)^2+9} + \frac{c}{(3c+a+b)^2+9} \leq \frac{1}{10}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. Едно естествено число ще наричаме „11-устойчиво”, ако не е кратно на 11 и ако след смяната на коя да е една негова цифра с която и да е от цифрите от 0 до 9 се получава число, което също не е кратно на 11. Началната цифра не може да се заменя с 0. Да се намерят всички естествени числа с 2009 цифри, които са „11-устойчиви”.

## Решения

Задача 1. Нека  $\angle BAC = \alpha$  и правите  $PM$  и  $CD$  се пресичат в точката  $N$ . Очевидно  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle DPN = \angle MPB = 90^\circ - \alpha$  (1т). Нека симетралата на отсечката  $AB$  пресича правата  $AP$  в точката  $E$ . Ако допуснем, че точките  $P$  и  $E$  съвпадат, ще получим, че центърът на окръжността, описана около четириъгълника, лежи върху правата  $PM$  - противоречие. Знаем, че  $\angle PAB = \alpha$ , а  $\angle MPB = 90^\circ - \alpha$ . Триъгълникът  $ABE$  е равнобедрен, откъдето  $\angle MEB = 90^\circ - \alpha = \angle MPB$  (3т). Следователно около четириъгълника  $PMBE$  може да се опише окръжност с диаметър  $BE$  (2т), защото  $\angle EMB$  е прав, а оттам и  $\angle PBE$  е прав, тоест диагоналите на  $ABCD$  са перпендикулярни (1т).

Задача 2. Ще използваме, че за всяко положително число  $x$  е вярно неравенството

$$\frac{1}{x^2+9} \leq \frac{1}{6x} \text{ (1т), като равенство се достига при } x=3, \text{ както и } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ (1т), като}$$

равенство се достига при  $x=1$ . Оттук получаваме

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9} \leq \frac{a}{6(3a+b+c)}, \quad \frac{b}{(3b+c+a)^2+9} \leq \frac{b}{6(3b+c+a)} \text{ и}$$

$$\frac{c}{(3c+b+a)^2+9} \leq \frac{c}{6(3c+b+a)} \text{ (1т). Нека положим}$$

$3a+b+c = x, 3b+c+a = y, 3c+b+a = z$ , тогава

$10a = 4x - y - z, 10b = 4y - x - z, 10c = 4z - x - y$  (1т). Така получаваме:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{(3a+b+c)^2+9} + \frac{b}{(3b+c+a)^2+9} + \frac{c}{(3c+a+b)^2+9} \leq \\
& \leq \frac{a}{6(3a+b+c)} + \frac{b}{6(3b+a+c)} + \frac{c}{6(3c+b+a)} \leq \\
& \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} \left( \frac{4x-y-z}{x} + \frac{4y-x-z}{y} + \frac{4z-x-y}{z} \right) \leq \quad (2г) \\
& \leq \frac{1}{60} \left( 12 - \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) - \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) - \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{60} (12 - 2 - 2 - 2) \leq \frac{6}{60} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Равенство се достига когато има равенство навсякъде или при  $a = b = c = \frac{3}{5}$  (1г).

Задача 3. Нека числото  $P = \overline{a_1 a_2 \dots a_{2009}}$  е „11-устойчиво” и нека  $S = S_1 - S_2$ , където  $S_1 = a_1 + a_3 + \dots + a_{2009}$  е сумата от цифрите на нечетни позиции в  $P$ , а  $S_2 = a_2 + a_4 + \dots + a_{2008}$  е сумата от цифрите на четни позиции в  $P$ . Да разгледаме произволна цифра  $a_{2i}$ , стояща на четно място в  $P$ . Тогава никое от числата  $S + a_{2i}; S + a_{2i} - 1; S + a_{2i} - 2; \dots; S + a_{2i} - 9$  няма да се дели на 11, защото ако  $S + a_{2i} - j$  се дели на 11, то замяната на цифрата  $a_{2i}$  с цифрата  $j$  в числото  $P$  ще ни доведе до число, което се дели на 11, тоест  $P$  няма да е „11-устойчиво”. Но числата  $S + a_{2i}; S + a_{2i} - 1; S + a_{2i} - 2; \dots; S + a_{2i} - 9$  са десет поредни цели числа и щом никое от тях не се дели на 11, то на 11 се дели числото  $S + a_{2i} + 1$  (1г). Оттук следва, че всички цифри, стоящи на четни позиции в  $P$  дават един и същ остатък при деление на 11, а това означава, че те са равни (1г). Същото разсъждение можем да приложим и за цифрите на  $P$ , стоящи на нечетни позиции, освен първата (защото при първата цифра има замяна с нула, която е забранена). Следователно, ако съществуват „11-устойчиви” числа с 2009 цифри, то те трябва да имат вида  $\overline{a_1 a_2 a_3 a_2 a_3 \dots a_2 a_3}$  (1г). Разбира се, в този запис цифрите  $a_1, a_2, a_3$  не са обезателно различни. Нека сега  $P_1$  е „11-устойчиво” число с повече от 22 цифри. Тогава числото  $P_1^*$ , получено от  $P_1$  след премахването на последните 22 цифри, също е „11-устойчиво”. Това е така, защото ако замяната на някоя цифра в  $P_1^*$  го прави кратно на 11, същата замяна ще направи кратно на 11 и  $P_1$ , а това е невъзможно -  $P_1$  е „11-устойчиво”. Обяснението на този факт се крие в обстоятелството, че сумите, които проверяваме за кратност на 11 при числата  $P_1$  и  $P_1^*$ , се различават точно с  $11(a_2 - a_3)$ , а това е число, кратно на 11 (1г). И понеже 2009 дава остатък 7 при деление на 22, за да решим докрай задачата, е достатъчно да намерим седемцифрените „11-устойчиви” числа. Всяко такова число трябва да има вида  $\overline{a_1 a_2 a_3 a_2 a_3 a_2 a_3}$ , където  $a_1, a_2$  и  $a_3$  са произволни цифри и  $a_1 \neq 0$ . Нека  $S = a_1 + a_3 + a_3 + a_3 - a_2 - a_2 - a_2 = a_1 + 3a_3 - 3a_2$ . Съгласно доказаното по-горе, за да не може замяната на някоя от цифрите  $a_2$  с произволна цифра да доведе до получаването на кратно на 11 число, е необходимо и достатъчно числото  $S + a_2 + 1 = a_1 - 2a_2 + 3a_3 + 1$  да се дели на 11. За да не може замяната на някоя от цифрите  $a_3$  да доведе до

получаването на кратно на 11 число, е необходимо и достатъчно никое от числата  $S - a_3, S - a_3 + 1, \dots, S - a_3 + 9$  да не се дели на 11, а това означава, че числото  $S - a_3 - 1 = a_1 + 2a_3 - 3a_2 - 1$  да се дели на 11. За да не може замената на цифрата  $a_1$  с някоя от цифрите  $1; 2; \dots, 9$  да доведе до число, кратно на 11, е необходимо и достатъчно никое от числата  $1 + 3a_3 - 3a_2; 2 + 3a_3 - 3a_2; \dots; 9 + 3a_3 - 3a_2$  да не се дели на 11, а това ще е изпълнено точно тогава, когато едно от числата  $3a_3 - 3a_2$  или  $3a_3 - 3a_2 - 1$  се дели на 3. И така, цифрите  $a_1, a_2, a_3$  трябва да са такива, че числата  $a_1 - 2a_2 + 3a_3 + 1; a_1 + 2a_3 - 3a_2 - 1; 3a_3 - 3a_2$  са едновременно кратни на 11 или числата  $a_1 - 2a_2 + 3a_3 + 1; a_1 + 2a_3 - 3a_2 - 1; 3a_3 - 3a_2 - 1$  са кратни на 11 (1т). И в двата случая обаче, щом първите две числа са кратни на 11, то и тяхната разлика  $a_2 + a_3 + 2$  трябва да е кратна на 11, а това е възможно само когато  $a_2 + a_3 = 9$ . Като разгледаме възможностите за  $a_2$  и  $a_3$ , виждаме, че тогава  $3a_3 - 3a_2$  никога няма да се дели на 11, а  $3a_3 - 3a_2 - 1$  ще се дели на 11 само при  $a_3 = 1$  и  $a_2 = 8$  (1т). Тогава за  $a_1$  остава единствената възможност  $a_1 = 1$ . Оттук получаваме, че единственото „11-устойчиво“ седемцифрено число е 1818181. Следователно отговорът на задачата е, че единственото „11-устойчиво“ число с 2009 цифри е числото  $\underbrace{181818\dots 181}_{2009}$  (1т).